



**POLITECHNIKA
RZESZOWSKA**
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA



**WYDZIAŁ
BUDOWY MASZYN
I LOTNICTWA**
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Wytrzymałość przekładni walcowych

dr inż. Michał Batsch

Rozkład sił w przekładni zębatej

W przekładni zębatej występują siły:

- siła obwodowa

$$P = \frac{2M}{d}$$

- siła promieniowa

$$P_r = P \tan \alpha_t$$

- siła wzdłużna

$$P_w = P \tan \beta$$

- siła normalna do boku zęba

$$P_n = \frac{P}{\cos \alpha_n \cos \beta}$$

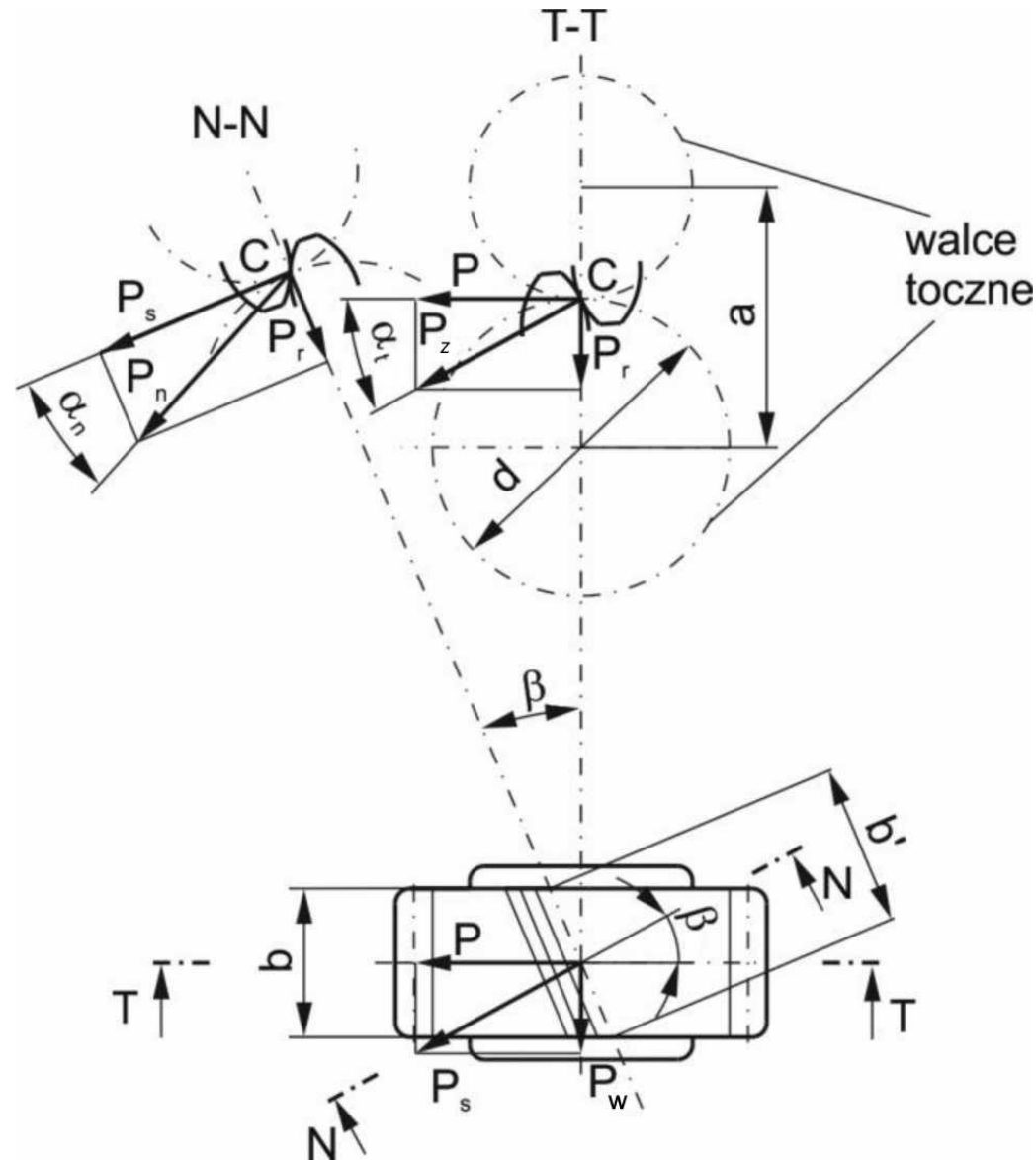
- siła prostopadła do linii zęba

$$P_s = \frac{P}{\cos \beta}$$

- siła wzdłuż linii przyporu

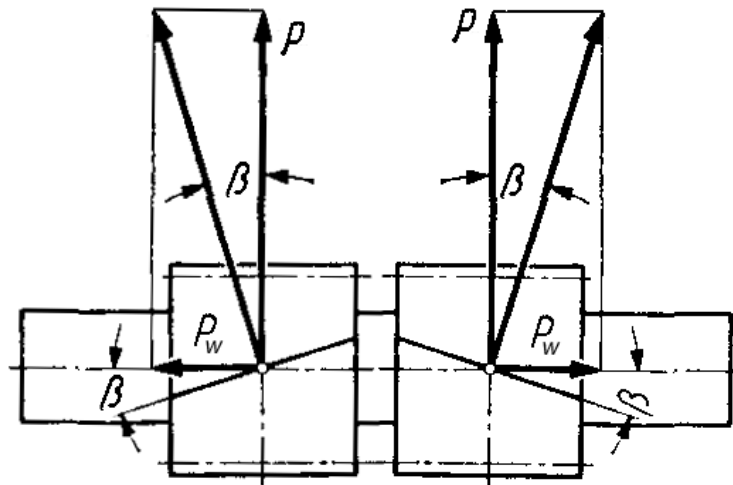
$$P_z = \frac{P}{\cos \alpha_t}$$

Dla kół o zębach prostych: $\beta = 0^\circ$, $\alpha_n = \alpha_t = \alpha$ (dla kół korygowanych $\alpha = \alpha_r$).



Równoważenie siły wzdłużnej

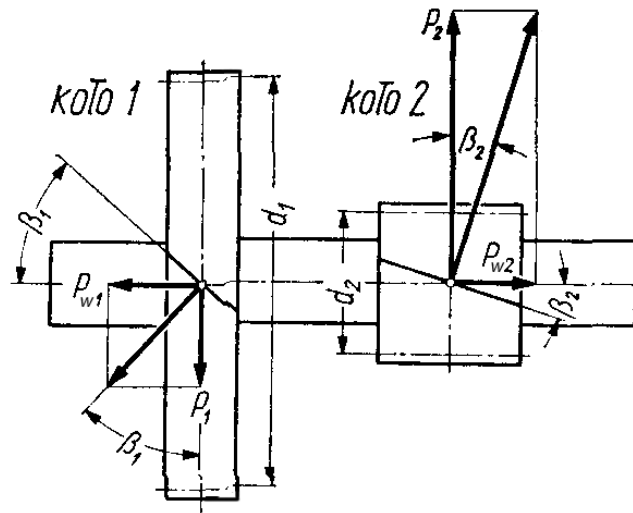
W przypadku kół zębatach o śrubowej linii zęba występuje siła wzdłużna, którą muszą przenieść łożyska. Istnieją sposoby na jej równoważenie. Pierwszym z nich jest zastosowanie koła zębatego daszkowego (rysunek poniżej).



Koło takie posiada dwa uzębienia o przeciwnych kierunkach pochylenia linii zębów. Pozwala to na częściowe, co wynika z nierównomierności przenoszenia obciążenia przez każde z uzębień, wyrównoważenie sił wzdłużnych. Aby zapewnić jak największą równomierność, a tym samym w jak największym stopniu zredukować wypadkową siłę wzdłużną działającą na wał stosuje się pływający układ łożyskowania na jednym z wałów z kołami daszkowymi.

Równoważenie siły wzdłużnej

Kolejną możliwością zrównoważenia sił wzdłużnych jest odpowiedni dobór kątów pochylenia linii zębów na wale pośrednim, co pokazano na rysunku poniżej.



Aby siły wzdłużne były równe co do wartości musi zachodzić warunek

$$\frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

Na podstawie tego warunku, znając np.: kąt β_1 można wyznaczyć wartość kąta β_2 , która zapewni zrównoważenie sił wzdłużnych.

Zastępcze obciążenie zęba

Zastępcze obciążenie zęba jest to maksymalna wartość siły obwodowej jaka może wystąpić podczas pracy przekładni. Uwzględnia ona zwiększenie wartości siły nominalnej wynikającej zarówno z wewnętrznych jak i zewnętrznych zjawisk dynamicznych. Wyraża się wzorem

$$P_{zast} = C_p C_d P$$

Współczynnik C_p to współczynnik przeciążenia. Uwzględnia charakter pracy przekładni, rodzaj napędu oraz maszyny napędzanej. Przy ustalaniu jego wartości można korzystać z poniższej tabeli.

Wartości współczynnika przeciążenia C_p wg Dudley'a

Charakter pracy silnika	Charakter pracy napędzanej maszyny		
	równomierny	średnie uderzenia	duże uderzenia
Równomierny	1	1,25	1,75
Lekkie uderzenia	1,10	1,35	1,80
Średnie uderzenia	1,25	1,50	1,85

Zastępcze obciążenie zęba

Współczynnik C_d to współczynnik nadwyżek dynamicznych, który uwzględnia wzrost siły wywołany wewnętrznymi zjawiskami dynamicznymi. Zależy on głównie od dokładności wykonania uzębienia i prędkości obwodowej. Można go obliczyć na podstawie wzorów wg poniższych tabel.

Wartości współczynnika C_d wg Henriota

Wielkości	Grupa dokładności			
	I	II	III	IV
v_{max} m/s	100	50	20	5-10
Klasy dokładności kół	2-5	4-6	6-8	8-10
C_d	$1 + \frac{\sqrt{v}}{30}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{12}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{6}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{3}$

Wartości współczynnika C_d wg Ochęduszki

Wielkości	Grupa dokładności				
	I	II	III	IV	V
v , m/s	50-100	20-50	10-20	3-10	0-3
Klasy dokładności	2-5	4-6	6-8	8-10	10-12
C_d	$1 + \frac{\sqrt{v}}{30}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{16}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{10}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{7}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{4}$

Wyteżenie zębów prostych u podstawy

Obliczenia wytrzymałościowe zęba u jego podstawy prowadzi się dla najgorszego przypadku, w którym ząb pracuje u wierzchołka. Jak wiadomo wówczas współpracuje co najmniej dwie pary zębów. Wobec powyższego wprowadza się obliczeniową siłę

$$P_{obl} = \frac{P_{zast}}{\epsilon_{\alpha}}$$

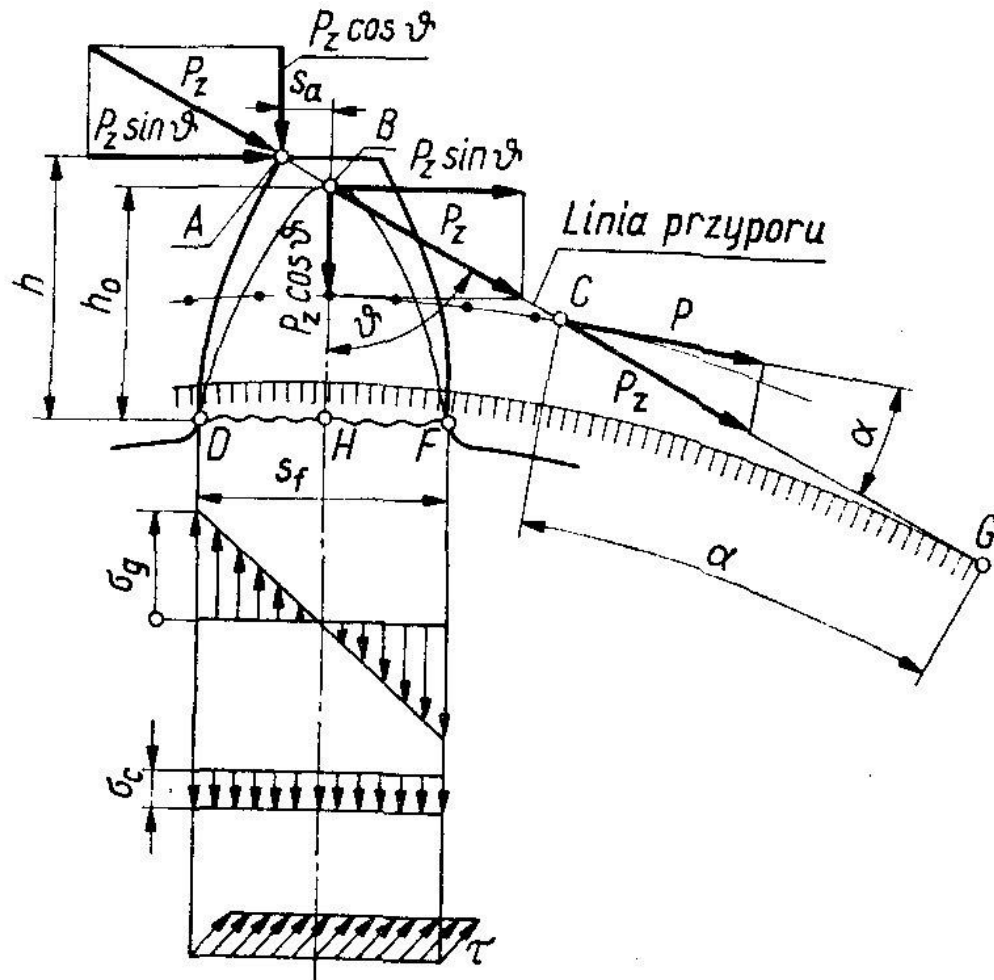
Jest to zastępcza siła obwodowa podzielona przez liczbę przyporu. Schemat obciążenia zęba pokazano poniżej.

Wyteżenie zębów prostych u podstawy

Ząb obciążony jest siłą P_z u wierzchołka. Siła ta biegnie wzdłuż linii przyporu i pochylona jest pod kątem ϑ do osi symetrii zęba. Ponadto pomiędzy siłą P_z a siłą obwodową (w tym przypadku obliczeniową siłą obwodową) zachodzi związek

$$P_z = \frac{P_{obl}}{\cos \alpha}$$

W wyniku działania siły P_z u podstawy występują: naprężenia gnące σ_g , naprężenia ściskające σ_c , naprężenia styczne (ścinięcie) τ .



Wyteżenie zębów prostych u podstawy

Zginanie

Moment gnący wywołwany jest pionową i poziomą składową siły P_z i określa go zależność

$$M_g = P_z h_0 \sin \vartheta$$

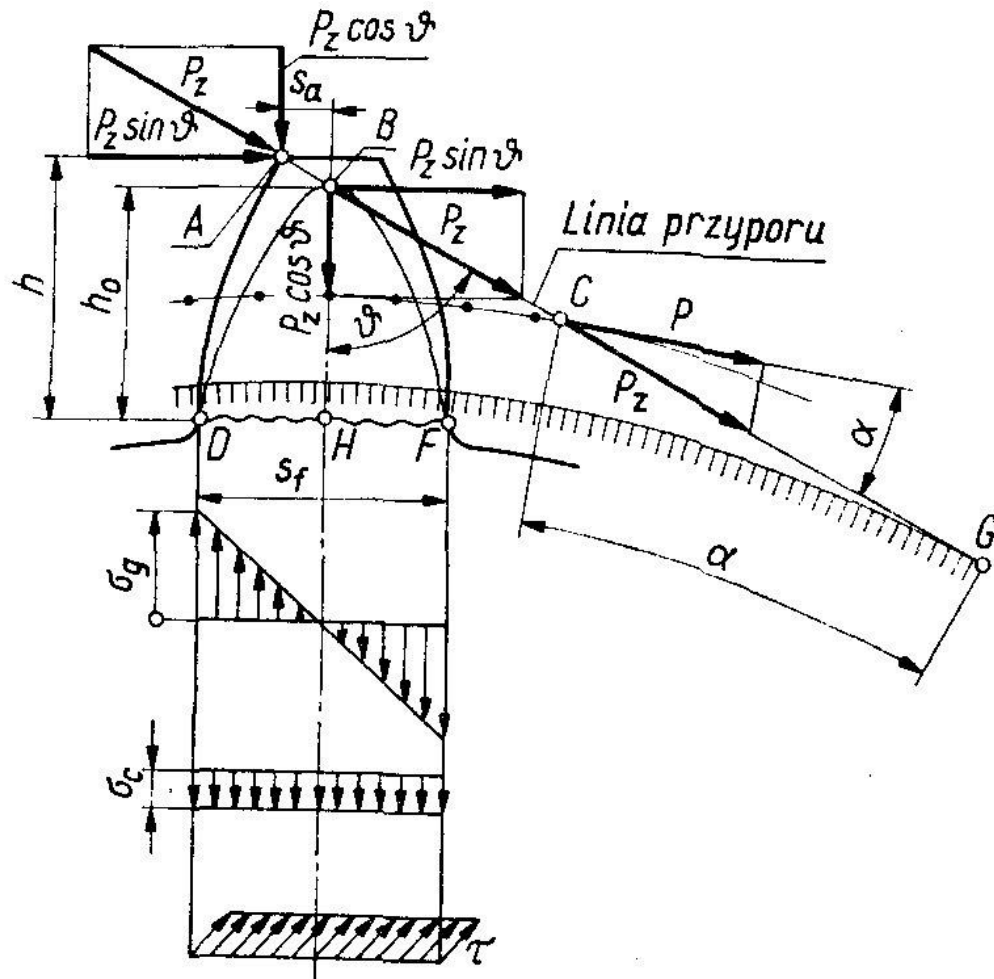
Naprężenia gnące natomiast

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x} = \frac{P_z h_0 \sin \vartheta}{\frac{b s_f^2}{6}} = \frac{6 P_z h_0 \sin \vartheta}{b s_f^2}$$

Ściskanie

Naprężenia ściskające wyraża zależność

$$\sigma_c = \frac{P_z \cos \vartheta}{b s_f}$$



Wyteżenie zębów prostych u podstawy

Ścinanie

Ząb ścinany jest siłą obwodową, wobec czego

$$\tau = \frac{P_{obl}}{b s_f}$$

Naprężenia zredukowane

U podstawy zęba występuje złożony stan naprężenia. Zgodnie z hipotezą wytrzymałościową Hubera

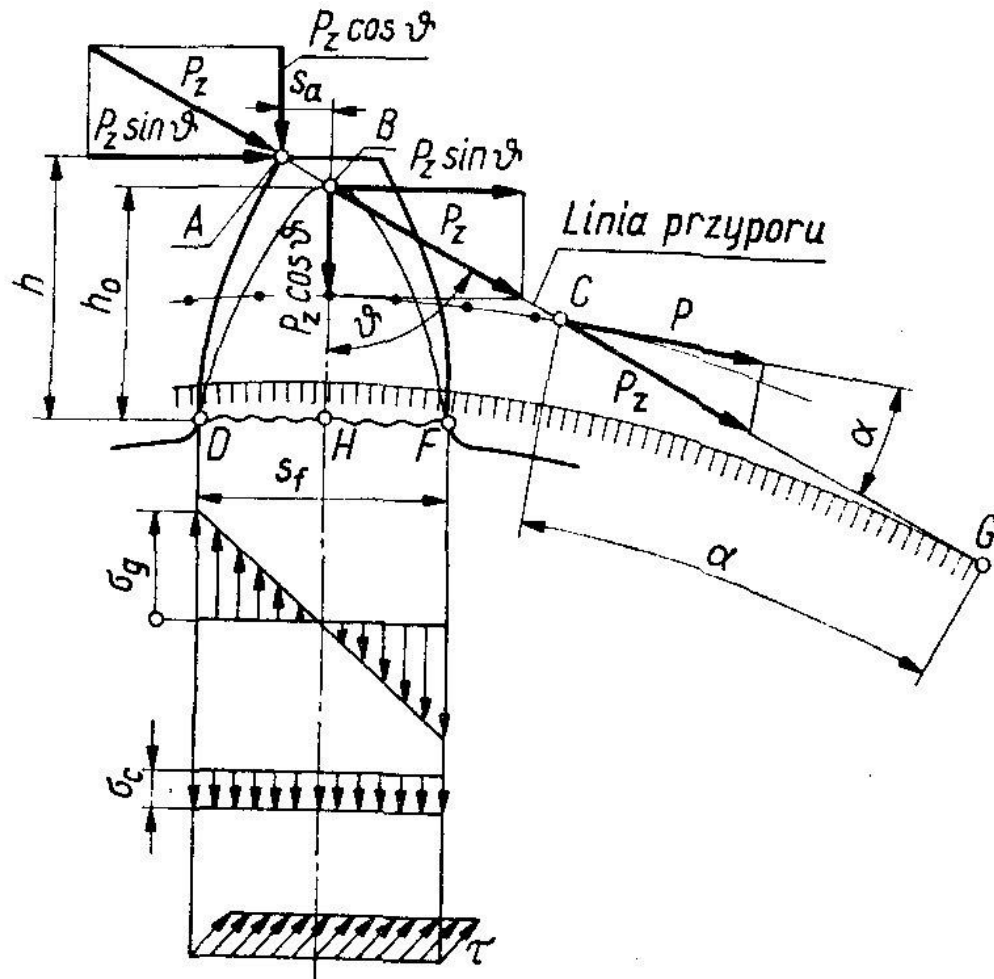
$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_g \pm \sigma_c)^2 + 3\tau^2}$$

Przyjmując, że wysokość obliczeniowa i grubość zęba u podstawy jest zależna od modułu oraz znaną już zależność na P_z :

$$h_0 = \varphi m \quad s_f = \xi m \quad P_z = \frac{P_{obl}}{\cos \alpha}$$

uzyskuje się naprężenia zredukowane w postaci:

$$\sigma_{red} = \frac{P_{obl}}{b m} \sqrt{\left(\frac{6\varphi \sin \vartheta}{\xi^2 \cos \alpha} \pm \frac{\cos \vartheta}{\xi \cos \alpha} \right)^2 + \frac{3}{\xi^2}}$$



Wyteżenie zębów prostych u podstawy

Przyjmując, że

$$q = \sqrt{\left(\frac{6\varphi \sin \vartheta}{\xi^2 \cos \alpha} \pm \frac{\cos \vartheta}{\xi \cos \alpha}\right)^2 + \frac{3}{\xi^2}}$$

to współczynnik wytrzymałości zęba u podstawy, a współczynnik $\lambda = 1/q$ to jego odwrotność można zapisać

$$\sigma_{red} = \frac{P_{obl}}{bm\lambda} \leq k_g$$

Wprowadzając współczynnik szerokości wieńca $\psi = b/m$ uzyskuje się nierówność

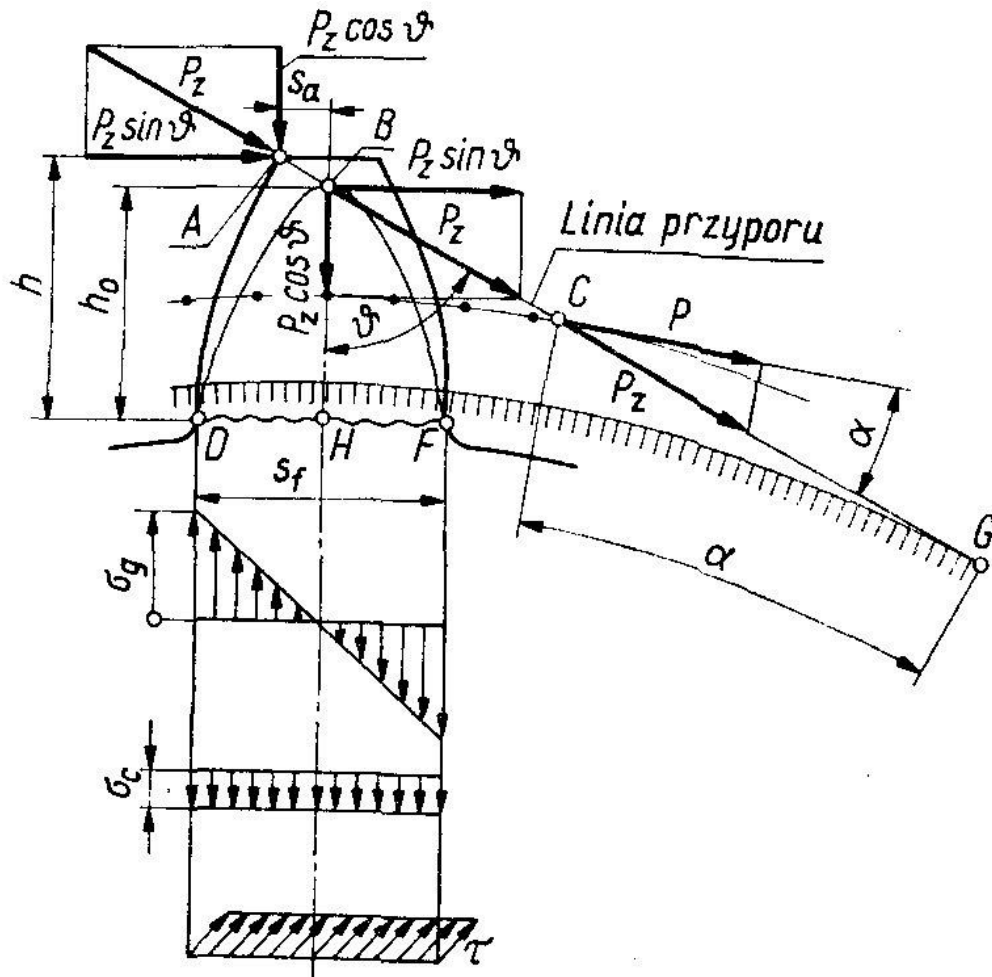
$$m \geq \sqrt{\frac{P_{obl}}{\psi \lambda k_g}}$$

Powyższa nierówność może posłużyć do oszacowania modułu kół zębatach wg warunku wytrzymałości zęba u podstawy.

W literaturze można odnaleźć tablice współczynników wytrzymałości zęba u podstawy dla różnych liczb zębów, kątów zarysu i współczynników przesunięcia zarysu.

Gdy naprężenia zredukowane są równe naprężeniom dopuszczalnym występuje równość

$$P_{obl} = bm\lambda k_g$$

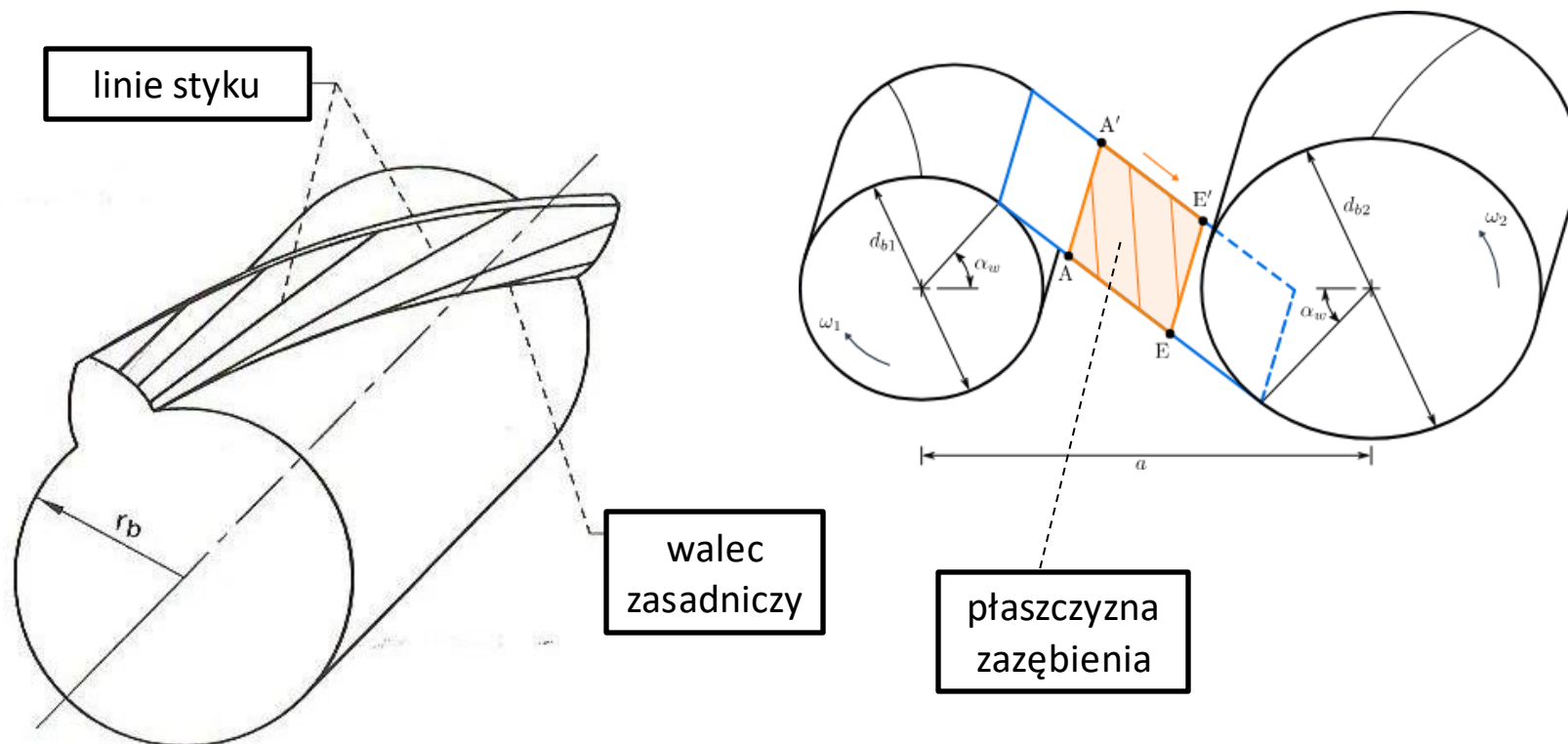


Wyteżenie zębów śrubowych u podstawy

W przypadku kół zębatych o śrubowej linii zęba wprowadza się siłę obliczeniową w postaci

$$P_{obl} = \frac{P_{zast}}{C_\beta} \quad \text{przy czym} \quad C_\beta = \begin{cases} 1,3 & \text{dla } \epsilon_\gamma \leq 1,5 \\ 1,4 & \text{dla } \epsilon_\gamma > 1,5 \end{cases}$$

W przypadku kół o zębach śrubowych styk jest liniowy, a linia styku porusza się wzdłuż płaszczyzny zazębienia.



Wyteżenie zębów śrubowych u podstawy

W przypadku kół zębatych o śrubowej linii zęba wprowadza się siłę obliczeniową w postaci

$$P_{obl} = \frac{P_{zast}}{C_\beta} \quad \text{przy czym} \quad C_\beta = \begin{cases} 1,3 & \text{dla } \epsilon_\gamma \leq 1,5 \\ 1,4 & \text{dla } \epsilon_\gamma > 1,5 \end{cases}$$

W przypadku kół o zębach śrubowych styk jest liniowy, a linia styku porusza się wzdłuż płaszczyzny zazębienia. Wywołuje to dodatkowe skręcanie zęba co uwzględnia się właśnie współczynnikiem C_β . Warunek wytrzymałości u podstawy wyprowadza jak dla zębów prostych przy czym:

- siłą zginającą ząb jest siła prostopadła do linii zęba P_s ,
- szerokością obliczeniową jest długość zęba l_z ,
- wytrzymałość analizuje się w przekroju normalnym, występują zatem: m_n , z_v , λ_v .

Na podstawie ostatniego równania z poprzedniego slajdu, zgodnie z powyższymi uwagami można zapisać

$$P_s = \lambda_v m_n l_z k_g$$

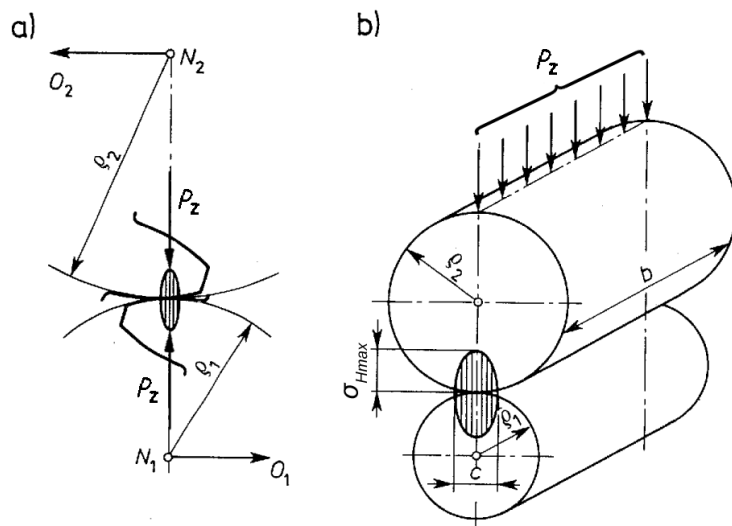
Uwzględniając, że: $l_z = \frac{b}{\cos \beta}$: $P_s = \frac{P_{obl}}{\cos \beta}$ $b = \psi m_n$ uzyskuje się:

$$m_n \geq \sqrt{\frac{P_{obl}}{\psi \lambda_v k_g}}$$

gdzie współczynnik wytrzymałości zęba u podstawy λ_v wyznacza się dla zastępczej liczby zębów z_v .

Wyteżenie zębów prostych na powierzchni

Zęby pracują w warunkach kontaktu zmęczeniowego. Pojawiające się naprężenia powierzchniowe gdy są zbyt duże mogą prowadzić do uszkodzeń powierzchni zębów np. do zjawiska zwanego pittingiem. Zjawisko to polega na powstawaniu na powierzchni zęba niewielkich jam, które powiększają się na skutek cyklicznie włączanego w nie oleju. Podczas projektowania przekładni zębatej należy sprawdzić wytrzymałość powierzchniową uzębienia. W tym celu przyjmuje się uproszczony model, w którym zarysy zębów zastępuje się ściskanymi z siłą P_z walcami, o promieniu równym promieniowi krzywizny w punkcie styku, o długość równą szerokości wieńca zębatego. Sprawdzenia dokonuje się na ogół dla jednoparowego przyporu (współpraca tylko dwóch zębów) w centralnym punkcie zazębienia C. Model obliczeniowy przedstawiono na poniższym rysunku.



Wyteżenie zębów prostych na powierzchni

Naprężenia wyznacza się na podstawie teorii Hertza dla liniowego styku dwóch ciał. Zgodnie z tą teorią maksymalne naprężenia powierzchniowe określa zależność

$$\sigma_{Hmax}^2 = \frac{2P_z}{0,5b(1/E_1 + 1/E_2)} 0,5 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{1}{2\pi(1-\nu^2)}$$

Uwzględniając w powyższym wzorze znane zależności

$$\rho_1 = 0,5d_1 \sin \alpha \quad \rho_2 = 0,5d_2 \sin \alpha \quad P_z = \frac{P_{zast}}{\cos \alpha}$$

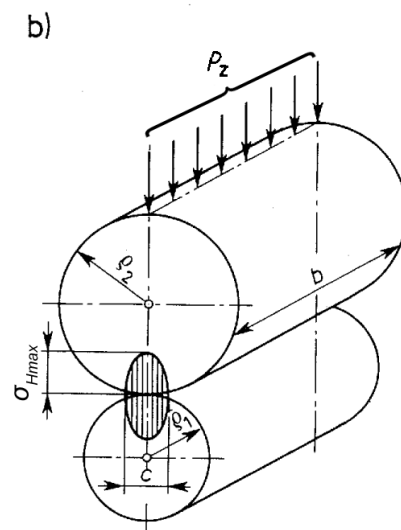
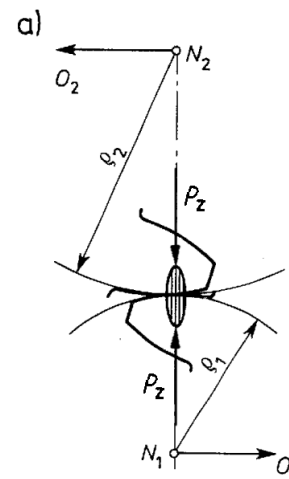
można go przekształcić do postaci

$$\sigma_{Hmax} = C_{m,\alpha} \sqrt{\frac{P_{zast}}{bd_1} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right)} \leq k_H$$

gdzie k_H to naprężenia dopuszczalna wg Hertza, a

$$C_{m,\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{2E_1E_2}{E_1+E_2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}}$$

jest współczynnikiem uwzględniającym kąt zarysu oraz rodzaj zastosowanych materiałów (E_1 , E_2 to moduły Younga, ν to współczynnik Poissona).



Wyteżenie zębów śrubowych na powierzchni

W przypadku zębów śrubowych wyprowadzenie warunku wytrzymałości zęba na powierzchni jest podobne przy czym obliczenia prowadzi się w przekroju normalnym, wobec czego:

- zamiast średnicy podziałowej przyjmuje się zastępczą średnicę podziałową

$$d_{v1} = \frac{d_1}{\cos^2 \beta}$$

- zamiast siły P_z występuje siła normalna do zęba

$$P_n = \frac{P_{zast}}{\cos \alpha_n \cos \beta}$$

- zamiast szerokości wieńca przyjmuje się całkowitą długość styku

$$l_c = \epsilon_\alpha l_z = \epsilon_\alpha \frac{b}{\cos \beta}$$

Uzyskuje się nierówność

$$\sigma_{Hmax} = C_{m,\alpha} \sqrt{\frac{P_{zast} \cos^2 \beta}{\epsilon_\alpha b d_1} \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)} \leq k_H$$



**POLITECHNIKA
RZESZOWSKA**
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA



**WYDZIAŁ
BUDOWY MASZYN
I LOTNICTWA**
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Dziękuję za uwagę!

dr inż. Michał Batsch