

Podstawy Konstrukcji Maszyn 2

Serwis: Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
Kurs: Podstawy konstrukcji maszyn 2 - wykład ML
Książka: Podstawy Konstrukcji Maszyn 2
Wydrukowane przez użytkownika: Michał Batsch
Data: wtorek, 20 grudzień 2022, 11:33

Spis treści

1. Wprowadzenie
 - 1.1. Napędy mechaniczne
 - 1.2. Przekładnie zębate
 - 1.3. Prawo zazębienia
2. Walcowe koła zębate o zębach prostych
 - 2.1. Równanie ewolwenty
 - 2.2. Wymiary uzębienia koła walcowego o zębach prostych
 - 2.3. Współpraca zarysów ewolwentowych
 - 2.4. Metody obróbki walcowych kół zębatych
 - 2.5. Graniczna liczba zębów
 - 2.6. Uzębienie z przesuniętym zarysem
 - 2.7. Skutki przesunięcia zarysu
 - 2.8. Wymiary koła zębatego z przesuniętym zarysem
 - 2.9. Grubość zęba na dowolnej średnicy
 - 2.10. Korekcja P-0 (bez zmiany odległości osi)
 - 2.11. Korekcja P (ze zmianą odległości osi)
 - 2.12. Przykłady korekcji P
3. Walcowe koła zębate o zębach śrubowych
 - 3.1. Linia zęba
 - 3.2. Moduł normalny i czołowy
 - 3.3. Kąt zarysu
 - 3.4. Zastępcza liczba zębów
 - 3.5. Graniczna liczba zębów
 - 3.6. Odległość osi
 - 3.7. Liczba przyporu
 - 3.8. Wady i zalety kół zębatych o zębach śrubowych
4. Wytrzymałość kół zębatych
 - 4.1. Rozkład sił w przekładni zębatej
 - 4.2. Równoważenie siły wzdłużnej
 - 4.3. Zastępcze obciążenie zęba
 - 4.4. Wytężenie zębów prostych u podstawy
 - 4.5. Wytężenie zębów śrubowych u podstawy
 - 4.6. Wytężenie zębów prostych na powierzchni
 - 4.7. Wytężenie zębów śrubowych na powierzchni
5. Przekładnie zębate stożkowe
 - 5.1. Wprowadzenie
 - 5.2. Parametry koła stożkowego
 - 5.3. Kąty stożków podziałowych
 - 5.4. Przekładnia zastępcza
 - 5.5. Rozkład sił
6. Przekładnie ślimakowe
 - 6.1. Wprowadzenie
 - 6.2. Walcowa przekładnia ślimakowa
 - 6.3. Sprawność przekładni ślimakowej
 - 6.4. Globoidalna przekładnia ślimakowa
7. Przekładnie cierne
 - 7.1. Wprowadzenie
 - 7.2. Walcowa przekładnia cierna

7.3. Stożkowa przekładnia cierna

8. Przekładnie pasowe

8.1. Wprowadzenie

8.2. Geometria przekładni pasowej

8.3. Przekładnie z pasem płaski i klinowym

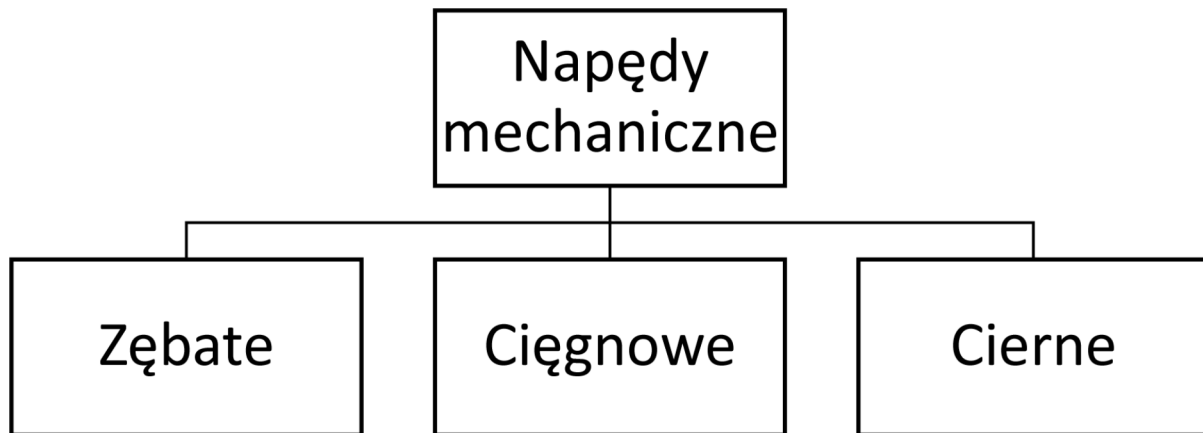
8.4. Przekładni z pasem zębatym

1. Wprowadzenie

1.1. Napędy mechaniczne

Napędy mechaniczne można podzielić zgodnie z poniższym rysunkiem na:

- napędy zębate,
- cięgnowe,
- cierne.

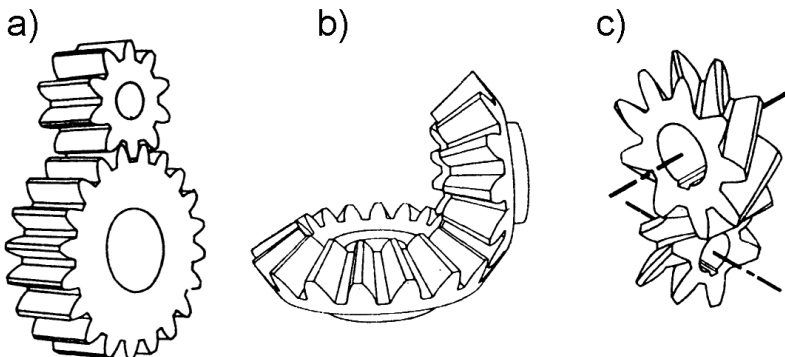


W napędach zębatych ruch przekazywany jest kształtowo poprzez koła ze specjalnie wykonanymi zębami. W przekładniach cięgnowych koła sprzężone są ze sobą cięgnem, którym może być: pas, lina lub łańcuch. W przekładniach ciernych natomiast moment przekazywany jest poprzez siłę tarcia pomiędzy dociskanymi do siebie kołami ciernymi.

1.2. Przekładnie zębate

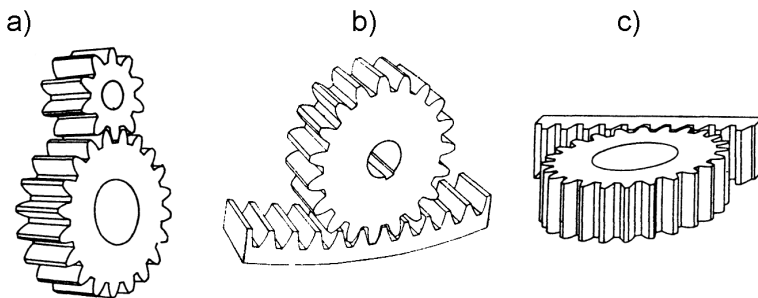
Przekładnie zębate wg geometrycznego układu klasyfikacyjnego można podzielić na:

- równoległe (osie obrotu kół są równoległe - rys. a) poniżej),
- kątowe (osie obrotu się przecinają - rys. b) poniżej),
- wchrowate (osie obrotu się nie przecinają i nie są równoległe - rys. c) poniżej).



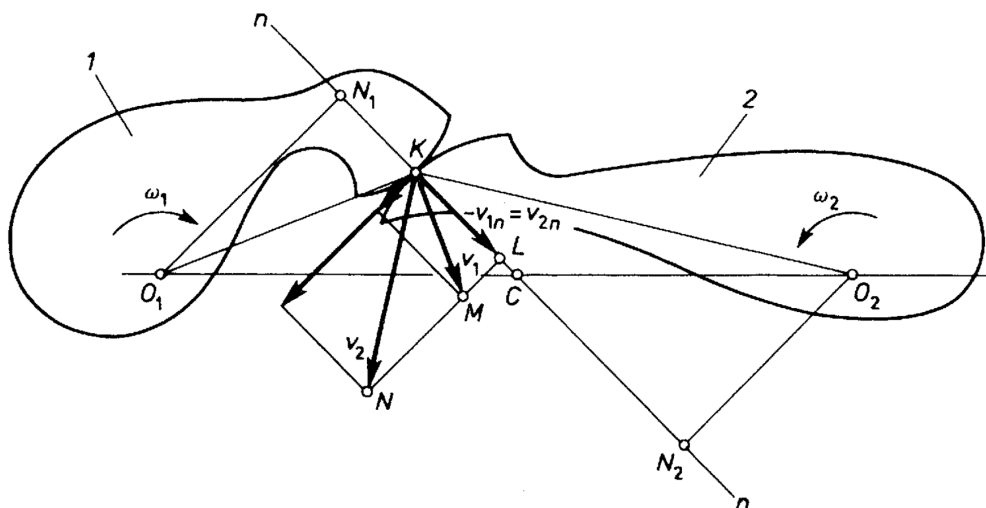
Ponadto wyróżnia się zazębienie:

- zewnętrzne (rys. a) poniżej),
- wewnętrzne (rys. b) poniżej),
- koła z zębatką (rys. c) poniżej).



1.3. Prawo ząbienia

Rozpatrzmy współpracę dwóch dowolnych zarysów jak pokazano na poniższym rysunku.



Wycinek koła zębatego czynnego 1 obracającego się wokół punktu O_1 współpracuje z wycinkiem koła zębatego biernego 2 obracającego się wokół punktu O_2 . Zarysy stykają się w punkcie K. Punkt K przypisany do bryły 1 porusza się z prędkością v_1 natomiast punkt K przypisany do bryły 2 porusza się z prędkością v_2 , przy czym:

$$v_1 = \omega_1 |O_1 K|$$

$$v_2 = \omega_2 |O_2 K|$$

Każdą z tych prędkości można rozłożyć na dwie składowe: styczną i normalną. Aby zachować ciągłość styku, prędkości normalne muszą być sobie równe, a więc:

$$v_{n1} = v_{n2}$$

Gdyby ten warunek nie zachodził i prędkość v_{1n} byłaby mniejsza od prędkości v_{2n} zarysy nie stykałyby się. Z kolei gdy prędkość v_{1n} byłaby większa od v_{2n} nastąpiło by przenikanie brył co w przypadku założenia, że współpracujące bryły są bryłami sztywnymi jest niemożliwe.

Zgodnie z powyższym rysunkiem zachodzą zależności:

$$v_{1n} = v_1 \frac{|O_1 N_1|}{|O_1 K|} = \omega_1 |O_1 N_1|$$

$$v_{2n} = v_2 \frac{|O_2 N_2|}{|O_2 K|} = \omega_2 |O_2 N_2|$$

Na podstawie równości prędkości normalnych otrzymuje się

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{|O_2 N_2|}{|O_1 N_1|}$$

Ponadto wprowadzając promienie $r_{1r} = |O_2 C|$, $r_{2r} = |O_1 C|$ oraz korzystając z podobieństwa trójkątów $O_1 C N_1$ i $O_2 C N_2$ można zapisać wzór na chwilowe przełożenie

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{2r}}{r_{1r}}$$

Stąd wynika, że aby wartość przełożenia była stała podczas obrotu kół, prosta normalna do obydwu zarysów powinna przechodzić przez stały (niezmienny) punkt C zwany centralnym punktem

zazębienia. Wówczas promienie r_{1r} i r_{2r} są promieniami okręgów tocznych, gdyż podczas pracy przekładni okręgi te odtaczają się po sobie bez poślizgu.

2. Walcowe koła zębate o zębach prostych

Zgodnie z zasadą tworzenia ewolwenty można zapisać równość

$$\widehat{AG} = \overline{CG}$$

gdzie:

$$\widehat{AG} = r_b (\widehat{\alpha} + \widehat{\gamma})$$

$$\overline{CG} = r_b \operatorname{tg} \alpha$$

Na tej podstawie wyprowadza się wzór na funkcję ewolwentową tzw inwolutę kąta α

$$\operatorname{inv} \alpha = \widehat{\gamma} = \operatorname{tg} \alpha - \widehat{\alpha}$$

Symbol łuku nad oznaczeniami kątów mówi o tym, że należy podstawiać wartości w mierze łukowej (w radianach). Kąt α jest zwany kątem przyporu i jest on definiowany na okręgu podziałowym o promieniu r . Odcinek CG jest promieniem krzywizny zęba w danym punkcie i jest on zmienny wzdłuż jego wysokości. Powyższą zależność można wyprowadzić dla średnicy dowolnej poprzez wprowadzenie indeksu dolnego y . Promień okręgu zasadniczego dany jest wzorem

$$r_b = r \cos \alpha$$

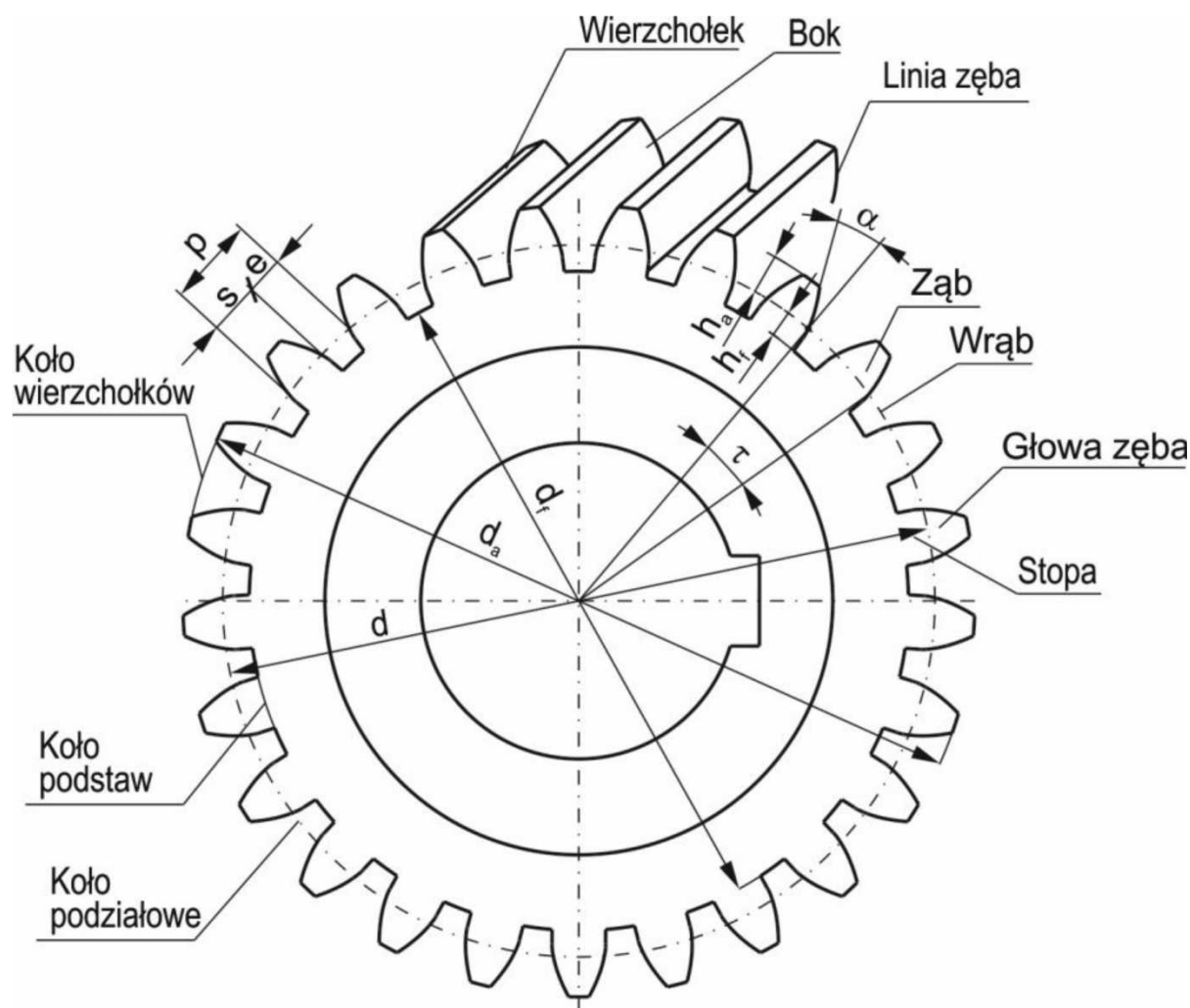
Zalety zazębienia ewolwentowego to:

- niewrażliwość na błąd rozstawienia osi,
- możliwość obróbki prostymi narzędziami (prostoliniowa krawędź skrawająca),
- tym samym narzędziem można obrabiać koło o różnych liczbach zębów,
- kierunek i wielkość nacisków promieniowych wzdłuż linii przyporu są stałe.

Jedną z głównych wad są stosunkowo duże naciski jednostkowe na powierzchni zębów w przypadku zazębienia zewnętrznego.

2.2. Wymiary uzębienia koła walcowego o zębach prostych

Poniżej przedstawiono wymiary koła zębatego z zębami prostymi.



z - liczba zębów,

d - średnica podziałowa,

d_a - średnica głów (wierzchołków),

d_f - średnica stóp (podstaw),

d_b - średnica zasadnicza,

$h = h_a + h_f$ - wysokość zęba,

h_a - wysokość głowy zęba,

h_f - wysokość stopy zęba,

\widehat{p} - podziałka zęba (mierzona po łuku),

\widehat{s} - grubość zęba (mierzona po łuku),

\widehat{e} - szerokość wrębu (mierzona po łuku).

Większość parametrów koła zębatego jest określana w funkcji modułu m . Moduł koła zębatego jest wielkością znormalizowaną i podawaną w mm. Liczba podziałek na kole podziałowym daje jego obwód co można wyrazić jako

$$z \widehat{p} = \pi d$$

$$d = z \frac{\widehat{p}}{\pi}$$

Wyrażenie p/π jest modulem m , w związku z tym uzyskuje się podstawowy wzór na średnicę podziałową koła zębatego

$$d = m z$$

Ponadto występuje zależność

$$\widehat{p} = m \pi.$$

Pozostałe parametry definiowane są następująco:

$$h_a = y m$$

$$h_f = (y + c^*) m$$

$$d_a = d + 2h_a$$

$$d_f = d - 2h_f$$

$$d_b = d \cos \alpha$$

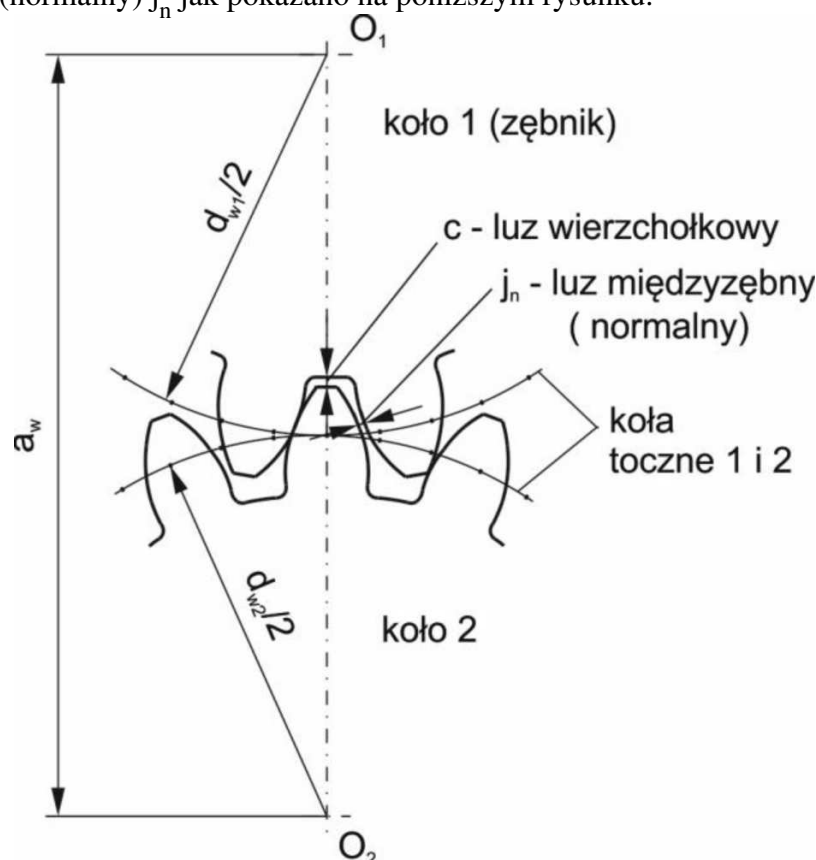
gdzie:

y - to współczynnik wysokości głowy zęba (dla kół normalnych $y=1$),

$c^*=0,1 \div 0,4$ - to współczynnik luzu wierzchołkowego (najczęściej $c^*=0,25$),

α - to kąt przyporu na średnicy podziałowej (zazwyczaj $\alpha=20^\circ$).

Aby zapewnić poprawną współpracę zębów wprowadza się luz wierzchołkowy c oraz obwodowy (normalny) j_n jak pokazano na poniższym rysunku.



Luz wierzchołkowy pozwala na swobodne przejście wierzchołka zęba koła współpracującego i wyraża się wzorem

$$c = m c^*$$

Luz obwodowy natomiast kompensuje rozszerzalność cieplną i tworzy przestrzeń dla smaru (filmu

olejowego). Można przyjąć ogólną wartość tego luzu jako

$$j_n = 0,04m$$

Przy czym należy ją traktować jako orientacyjną, gdyż rzeczywista wartość luzu obwodowego zależy od klasy dokładności i tolerancji wykonania uzębienia. Teoretycznie szerokość wrębu i grubość zęba mierzona po łuku okręgu podziałowego są sobie równe

$$\widehat{s} = \widehat{e} = \frac{\pi m}{2}$$

W praktyce, aby wystąpił lub obwodowy zachodzi nierówność

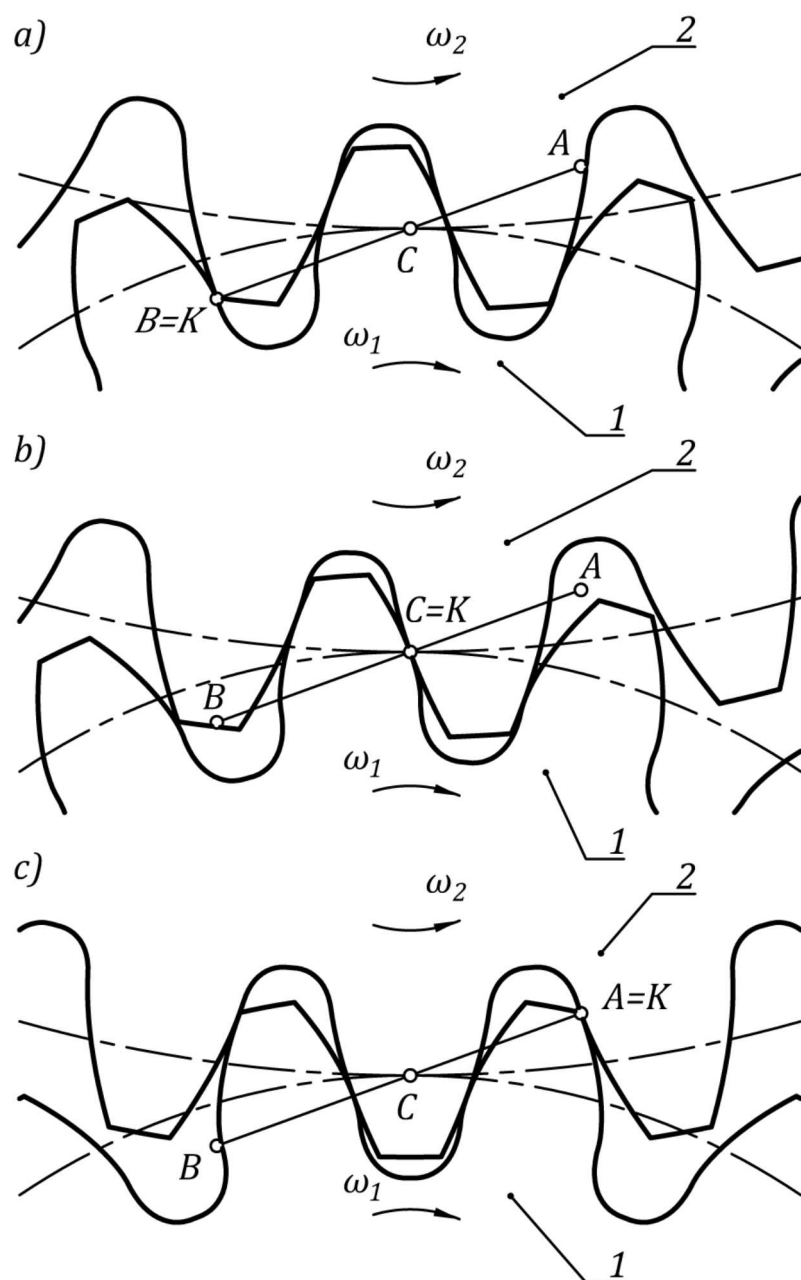
$$\widehat{e} > \widehat{s}$$

Wówczas

$$\widehat{e} - \widehat{s} = j_n$$

2.3. Współpraca zarysów ewolwentowych

Zasada współpracy zarysów ewolwentowych zostanie wyjaśniona na przykładzie zazębienia zewnętrznego zębniaka 1 z kołem 2, którą przedstawiono poniżej.

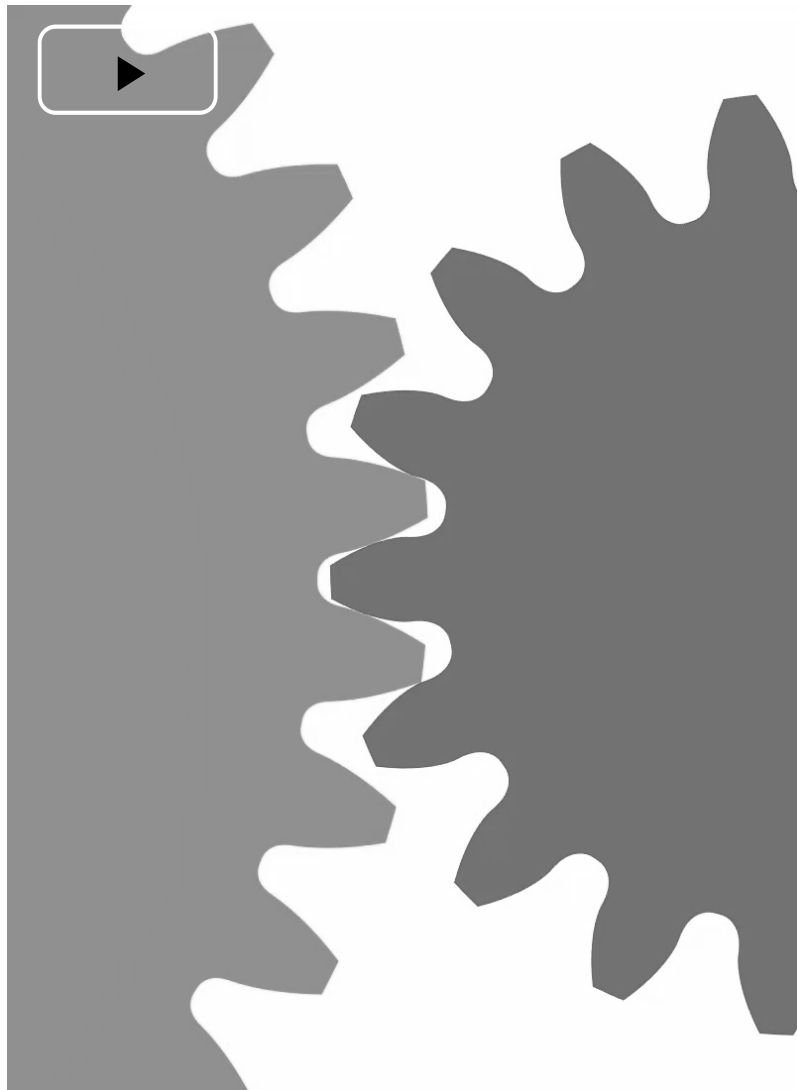


Przyjęto, że koło 1 jest kołem czynnym i napędza bierne koło 2. Ząb koła czynnego zawsze zaczyna współpracę w okolicy stopy kontaktując się z wierzchołkiem zęba koła biernego w punkcie B (rys. a). W miarę obrotu kół przekładni punkt styku K porusza się wzdłuż linii zazębienia poprzez centralny punkt zazębienia C (rys. b) aż do wyjścia z zazębienia w punkcie A (rys. c). Linia zazębienia AB jest miejscem geometrycznym kolejnych położenia punktu styku K jednej pary zębów. W przypadku zazębienia ewolwentowego linia zazębienia jest linią prostą. W celu zachowania ciągłości zazębienia oprócz zachowania prawa zazębienia przez współpracujące zarysy niezbędne jest to aby zanim jedna para zębów zakończy współpracę kolejna para już ją zaczęła. Wielkością, która to opisuje jest czołowy stopień pokrycia (czołowa liczba przyporu). Wyraża się wzorem

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{p \cos \alpha}$$

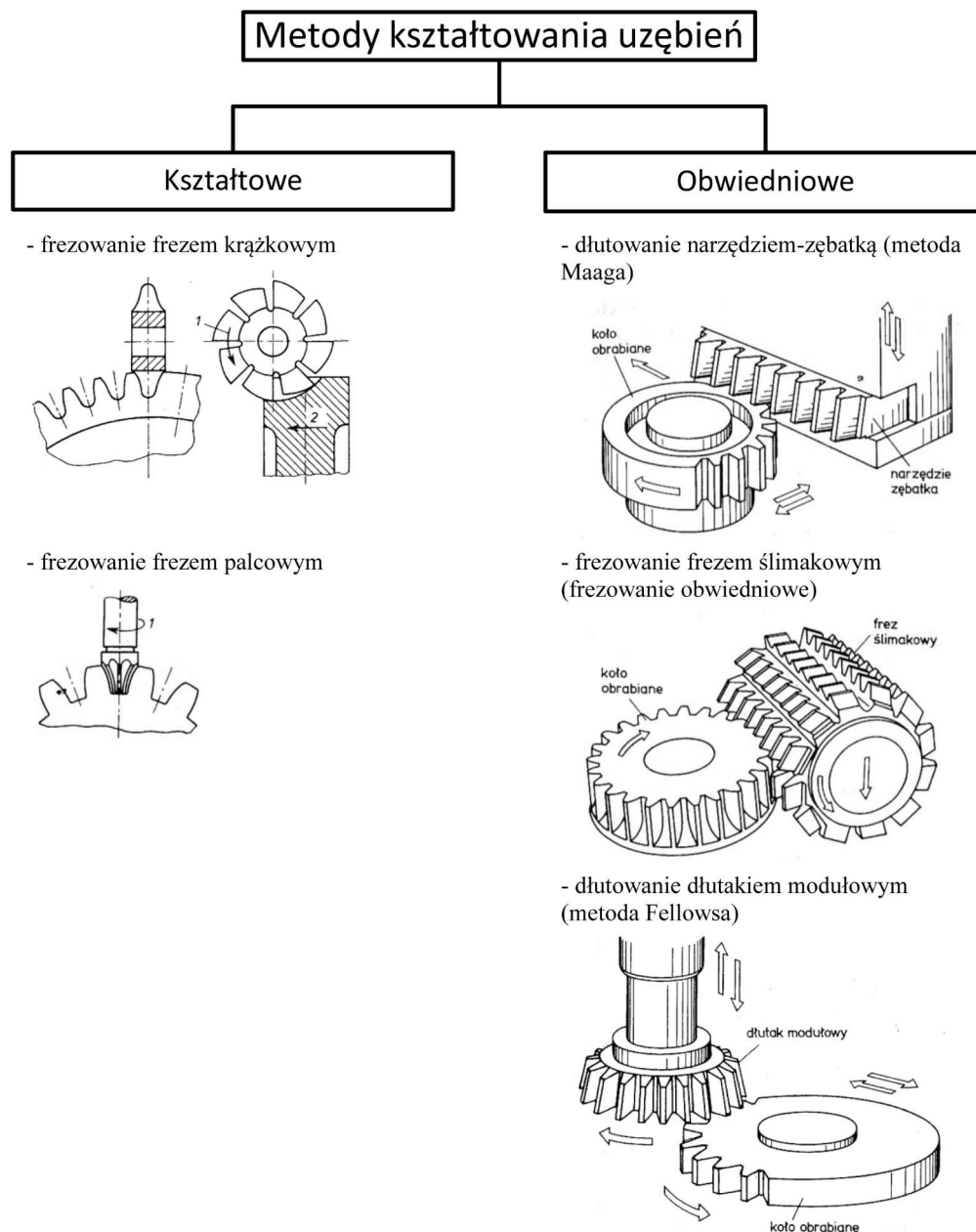
gdzie długość odcinka AB to czynna długość linii przyporu, a wyrażenie w mianowniku to podziałka zasadnicza. W uproszczeniu można powiedzieć, że czołowa liczba przyporu określa ile zębów pracuje jednocześnie. Powinna być ona większa od 1. Poniżej zaprezentowano animację pracy zazębienia o

liczbie przyporu $\varepsilon_\alpha = 1,59$.



2.4. Metody obróbki walcowych kół zębatach

Wyróżnia się dwie grupy metod kształtowania uzębień walcowych: metody kształtowe i metody obwiedniowe. Podstawowe metody obróbki uzębień zestawiono na rysunku poniżej.



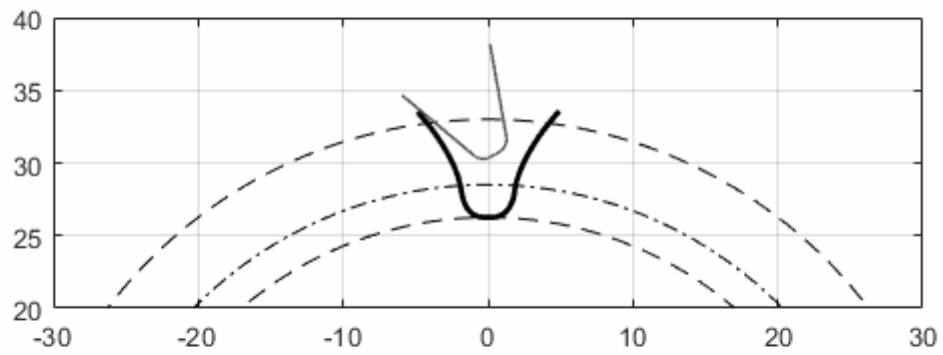
W metodach kształtowych zarys wrębu międzyzębego uzyskiwany jest bezpośrednio poprzez kształt narzędzia (frez krążkowy, frez palcowy, ściernica krążkowa).

W metodach obwiedniowych natomiast zarys zęba uzyskiwany jest w wyniku obwiedni kolejnych położeń narzędzia. Obwiednie tą uzyskuje się poprzez odpowiednie sprzężenie kinematyczne narzędzia oraz przedmiotu obrabianego. W tych metodach narzędzie może być:

- kołem zębatym (dłutowanie metodą Fellowsa, frezowanie typu "power skiving", honowanie, wiórkowanie),
- ślimakiem (frezowanie obwiedniowe, szlifowanie metodą Reishauera),
- zębatką (dłutowanie metodą Maag, szlifowanie metodą Nilesa).

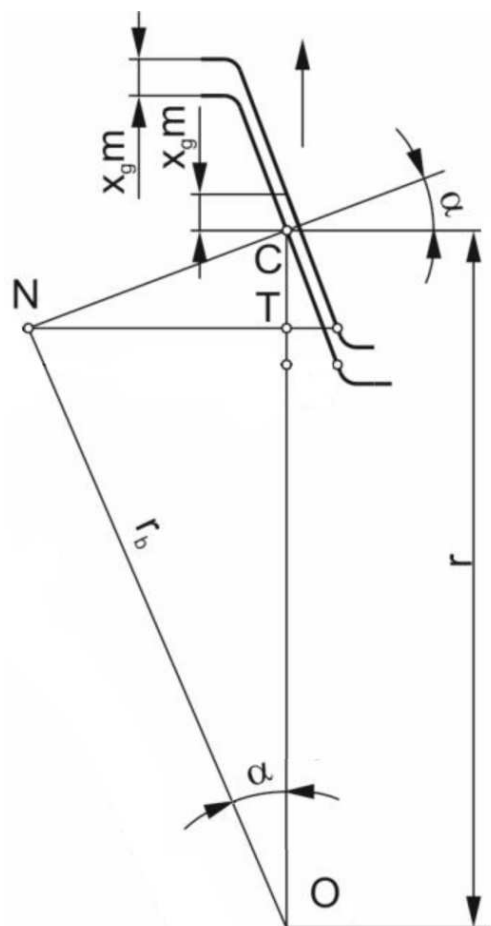
Oprócz tego występują metody obróbki uzębienia zgrubne oraz wykończeniowe.

Na animacji poniżej zaprezentowano schematycznie kształtowanie wrębu narzędziem-zębatką.



2.6. Uzębienie z przesuniętym zarysem

Przesunięcie zarysu można interpretować jako obróbkę uzębienia z narzędziem przesuniętym o wielkość $X=xm$ od koła obrabianego w kierunku promieniowym. Wielkość x nazywana jest współczynnikiem przesunięcia zarysu. Wyznamy tera z jaki powinien być współczynnik przesunięcia zarysu aby nie występowało podcięcie. Rozpatrzmy obróbkę narzędziem zębatką z zarysem przesuniętym o $x_g m$ jak pokazano poniżej (miarodajna linia wierzchołków narzędzia nie powinna przekroczyć linii NT).



Wobec powyższego rysunku można zapisać:

$$|TC| = ym - x_g m$$

$$|NC| = r \sin \alpha = 0,5 z m \sin \alpha$$

$$|TC| = |NC| \sin \alpha = 0,5 z m \sin^2 \alpha$$

Tym samym

$$0,5 z m \sin^2 \alpha = ym - x_g m$$

$$x_g = y - 0,5 z \sin^2 \alpha$$

Uwzględniając w powyższej zależności, że $\sin^2 \alpha = 2y/z_g$ uzyskano wzór na graniczny współczynnik przesunięcia zarysu

$$x_g = y \frac{z_g - z}{z_g}$$

Przykład 1

Dla koła zębatego o danych: $z=15$, $m=2mm$, $y=1$, $\alpha=20^\circ$ graniczny współczynnik przesunięcia zarysu

wynosi

$$x_g = \frac{17-15}{17} = \frac{2}{17}$$

co oznacza, że aby uniknąć podcięcia, zębatkę należy **odsunąć** od koła o wielkość co najmniej $X_g = 4/17$ mm

Przykład 2

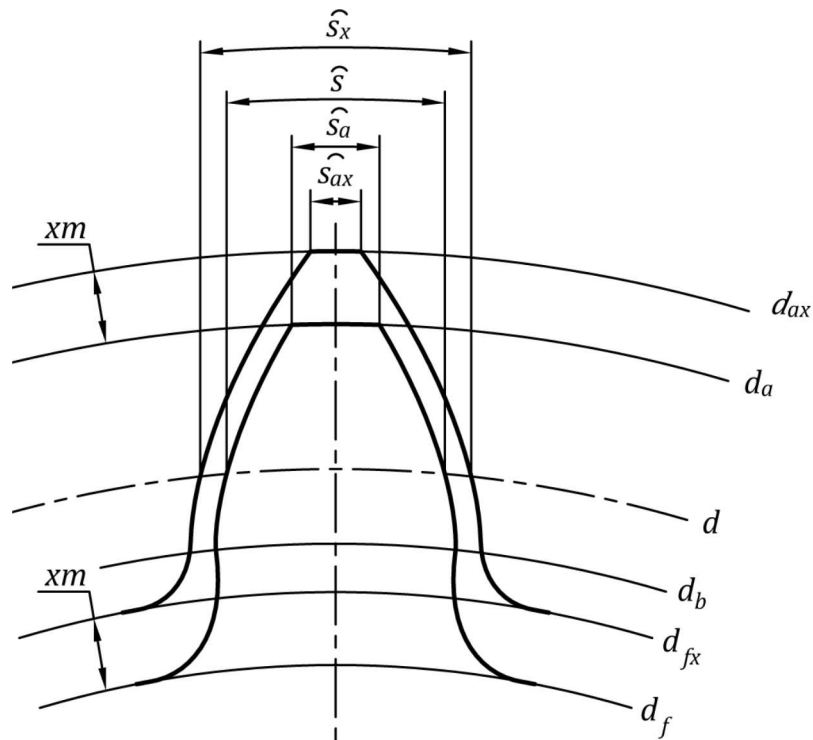
Dla koła zębatego o danych: $z=28$, $m=2\text{mm}$, $y=1$, $\alpha=20^\circ$ graniczny współczynnik przesunięcia zarysu wynosi

$$x_g = \frac{17-28}{17} = -\frac{11}{17}$$

co oznacza, że można **dosunąć** zębatkę co najwyżej o $X_g = 22/17$ mm aby nie wystąpiło podcięcie.

2.7. Skutki przesunięcia zarysu

Skutki przesunięcia zarysu przedstawiono na poniższym rysunku.



W wyniku przesunięcia zarysu zmianie ulega:

- średnica stóp d_f
- średnica głów d_a ,
- rośnie grubość zęba u podstawy i na średnicy podziałowej,
- maleje grubość zęba u wierzchołka.

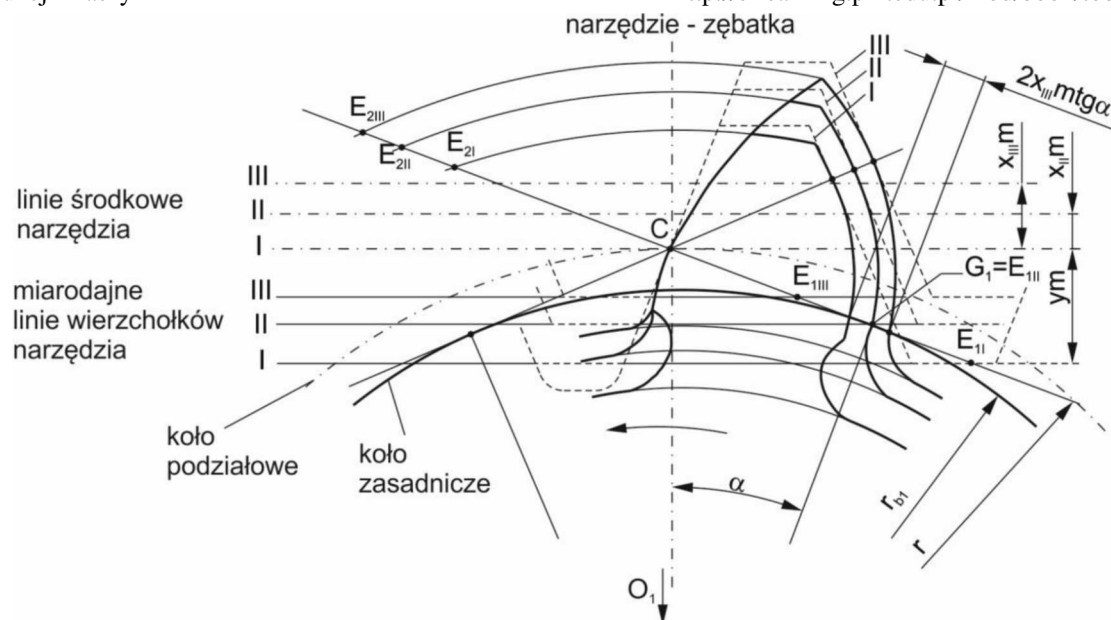
Ze względu na możliwość wykruszania się wierzchołka zęba określa się jego minimalną grubość jako:

- 0,4m (dla kół hartowanych),
- 0,25m (dla kół nieobrabianych cieplnie),

gdzie m to moduł.

Wielkość przesunięcia zarysu jest zatem ograniczona minimalną grubością zęba u wierzchołka oraz podcięciem zęba u podstawy.

Należy zwrócić uwagę, że przesunięcie współczynnika zarysu (korekcja uzębienia) nie zmienia średnicy podziałowej d oraz zasadniczej d_b . Można już zatem się domyślić, że zarys zęba w przypadku koła korygowanego i niekorygowanego tworzy ta sama ewolwenta (odwijana z tego samego okręgu zasadniczego). Do zarysu "brane" są jedynie inne jej fragmenty, co uwidoczniono na poniższym rysunku.

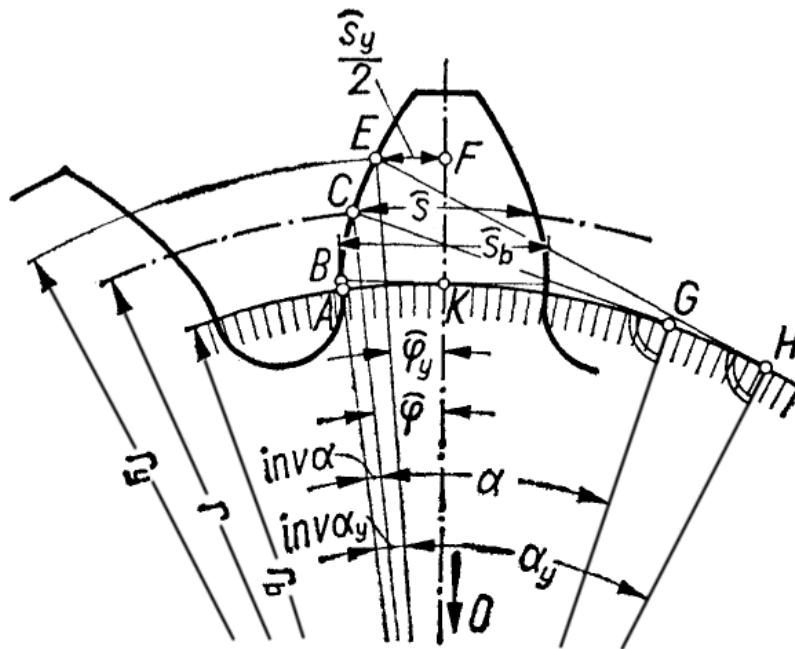


Narzędzie-zębatka w położeniu I wykonuje koło zębate z podcięciem, mocno korygowane na "-". Położenie narzędzia-zębatki II odpowiada uzębieniu, które jest korygowane poprawnie - brak zaostrenia wierzchołka i brak podcięcia. Położenie III natomiast, odpowiada przypadkowi mocno skorygowanego uzębienia na "+", gdzie występuje zaostrenie wierzchołka zęba.

$$\widehat{e}_x = \frac{\pi m + j_n}{2} - 2xmtg\alpha$$

2.9. Grubość zęba na dowolnej średnicy

W celu wyznaczenia grubości zęba na dowolnej średnicy posłużymy się poniższym rysunkiem.



Indeks y odnosi się do średnicy dowolnej, zatem:

- r_y to promień dowolny,
- \widehat{s}_y to grubość zęba na średnicy dowolnej (mierzona po łuku),
- φ_y to to kąt środkowy odpowiadający połowie grubości zęba na średnicy dowolnej,
- α_y to kąt zarysu zęba na średnicy dowolnej.

Ponadto:

- r to promień podziałowy,
- r_b to promień zasadniczy,
- \widehat{s} to grubość zęba na średnicy podziałowej (mierzona po łuku),
- φ to to kąt środkowy odpowiadający połowie grubości zęba na średnicy podziałowej,
- α to kąt zarysu zęba na średnicy podziałowej.

Na podstawie rysunku występują zależności:

$$\frac{\widehat{s}}{2} = r\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\widehat{s}}{d}$$

$$\frac{\widehat{s}_y}{2} = r_y\varphi_y \Rightarrow \widehat{s}_y = d_y\varphi_y$$

$$\varphi_y = \varphi + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_y$$

Na tej podstawie

$$\widehat{s}_y = d_y(\varphi + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_y) = d_y\left(\frac{\widehat{s}}{d} + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_y\right)$$

Uwzględniając grubość zęba na średnicy podziałowej uzyskuje się wzór na grubość zęba na średnicy

dowolnej w postaci

$$\widehat{s}_y = d_y \left(\frac{\frac{\pi m - j_n}{2} + 2xmtg\alpha}{mz} + inv\alpha - inv\alpha_y \right)$$

przy czym kąt przyporu na średnicy dowolnej można wyznaczyć z zależności

$$\cos\alpha_y = \frac{r_b}{r_y}$$

Na podstawie wyprowadzonego wzoru grubość wierzchołka zęba dana jest jako

$$\widehat{s}_a = d_a \left(\frac{\frac{\pi m - j_n}{2} + 2xmtg\alpha}{mz} + inv\alpha - inv\alpha_a \right)$$

W literaturze dotyczącej kół zębatach można znaleźć wykresy i tabele pozwalające na wyznaczenie grubości zęba u wierzchołka dla różnych liczb zębów i różnych współczynników przesunięcia zarysu. Wykresy budowane są zazwyczaj dla modułu 1. Odczytaną wartość należy przemnożyć przez moduł koła zębatego.

2.10. Korekcja P-0 (bez zmiany odległości osi)

Poprawnie przeprowadzona korekcja zazębienia może podnieść wydolność przekładni nawet do 20%.

Rodzaje korekcji:

- korekcja P-0 (bez zmian odległości osi)
- korekcja P (ze zmianą odległości osi)

W korekcji P-0 odległość osi się nie zmienia, a więc

$$a_0 = 0,5m(z_1 + z_2)$$

Aby odległość osi była niezmienna, koło małe korygowane jest na "+", koło duże zaś na "-" z taką samą wartością przesunięcia zarysu. Tym samym zachodzi równość

$$x_1 = -x_2$$

Aby możliwe było przeprowadzenie korekcji P-0 bez podcięcia, graniczne przesunięcie zarysu koła małego powinno być mniejsze od wielkości przesunięcia zarysu na kole dużym, co można wyrazić warunkiem:

$$x_{g1} \leq -x_{g2}$$

Podstawiając zależność na graniczny ze względu na podcięcie współczynnik przesunięcia zarysu, uzyskuje się

$$y \frac{z_g - z_1}{z_g} \leq -y \frac{z_g - z_2}{z_g}$$

Po przekształceniu otrzymuje się warunek prowadzenia korekcji P-0 jako

$$z_1 + z_2 \geq 2z_g$$

Przy dopuszczeniu małego podcięcia

$$z_1 + z_2 \geq 2z'_g$$

Na skutek korekcji P-0:

- głowa zęba koła małego powiększa się, a dużego się zmniejsza,
- grubość zęba na średnicy podziałowej zwiększa się dla koła małego, a zmniejsza się dla koła dużego,
- powiększa się stopień pokrycia,
- występują korzystne warunki poślizgowe.

$$a_p = a_0 + x_1 m + x_2 m$$

Przekładnia z taką odległością osi spełniałaby swoją rolę, posiadałaby jednak zbyt duże luzy obwodowe (hałasowanie).

W związku z tym poszukuje się dla pary zębatej rzeczywistej odległości osi a_r , przy której parametry współpracy są zgodne z wymaganiami. Wobec rysunku zachodzi:

$$a_0 < a_r < a_p$$

Ponadto, promienie podziałowe można przedstawić jako

$$r_1 = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_0}$$

$$r_2 = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_0}$$

gdzie α_0 to kąt przyporu na średnicy podziałowej (często $\alpha_0 = 20^\circ$). Sumując promienie podziałowe otrzymuje się

$$a_0 = r_1 + r_2 = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha_0} \Rightarrow a_0 \cos \alpha_0 = r_{b1} + r_{b2}$$

Podobne zależności można uzyskać dla promieni tocznych

$$r_{1r} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_r}$$

$$r_{2r} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_r}$$

gdzie α_r to toczy kąt przyporu. Sumując promienie toczne otrzymuje się rzeczywistą odległość osi

$$a_r = r_{1r} + r_{2r} = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha_r} \Rightarrow a_r \cos \alpha_r = r_{b1} + r_{b2}$$

Tym samym można zapisać zależność

$$a_0 \cos \alpha_0 = a_r \cos \alpha_r$$

z której wynika

$$a_r = a_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_r} \quad (1)$$

Na tym etapie zakłada się przekładnię bezluzową - brak luzu obwodowego. Wówczas podziałka na kole tocznym jest równa sumie grubości zębów na tych kołach, a więc

$$\widehat{p}_r = \widehat{s}_{1r} + \widehat{s}_{2r} = \pi m_r$$

gdzie m_r to moduł toczny. Korzystając ze wzoru na grubość zęba na dowolnej średnicy, dla okręgu tocznego otrzymuje się

$$\widehat{s}_r = d_r \left(\frac{\frac{\pi m}{2} + 2x m t g \alpha_0}{m z} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_r \right) = m_r z \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2x t g \alpha_0}{z} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_r \right)$$

Następnie wykorzystując ten wzór we wzorze na podziałkę toczną, dla kół 1 i 2 otrzymuje się

$$\pi m_r = m_r z_1 \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_r \right) + m_r z_2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_2} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_r \right)$$

Po przekształceniu

$$\operatorname{inv} \alpha_r = \operatorname{inv} \alpha_0 + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0 (x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \quad (2)$$

Wyznaczając α_r ze wzoru (2) można obliczyć a_r ze wzoru (1). W wyniku zsunęcia osi kół na odległość rzeczywistą a_r , skróceniu ulega głowa zęba koła o wielkość km .

$$km = a_p - a_r$$

$$d_a = d + 2m(y + x - k)$$

2) $a_0 \neq a_{PN}$

W tym przypadku znany jest kąt przyporu α_0 , zerowa odległość osi a_0 oraz rzeczywista odległość osi a_r , którą należy uzyskać. Przekształcając zależność (1) otrzymuje się

$$\cos \alpha_r = \frac{a_0}{a_r} \cos \alpha_0 \quad (3)$$

Ze wzoru (2) natomiast otrzymać można

$$x_1 + x_2 = \frac{(z_1 + z_2)(\operatorname{inv} \alpha_r - \operatorname{inv} \alpha_0)}{2 \operatorname{tg} \alpha_0} \quad (4)$$

Ze wzoru (3) należy wyznaczyć toczny kąt przyporu, następnie ze wzoru (4) oblicza się sumę współczynników przesunięcia zarysów. W dalszej kolejności sumę tą rozdziela się na poszczególne koła. Istnieje kilka wariantów rozdziału sumy współczynników:

Wariant 1

$$x_1 = x_1 + x_2$$

$$x_2 = 0$$

W tym przypadku należy zawsze sprawdzić grubość zęba u wierzchołka.

Wariant 2

Maksymalny ze względu na zaostrenie zęba współczynnik na koło małe, pozostała część sumy na koło duże.

Wariant 3

Sumę rozdziela się po połowie.

Wariant 4

Sumę rozdziela się odwrotnie proporcjonalnie do przełożenia.

Wariant 5

Sumę rozdziela się wg innych kryteriów np.: ze względów wytrzymałościowych.

3) Współczynniki zarysu określane "z góry"

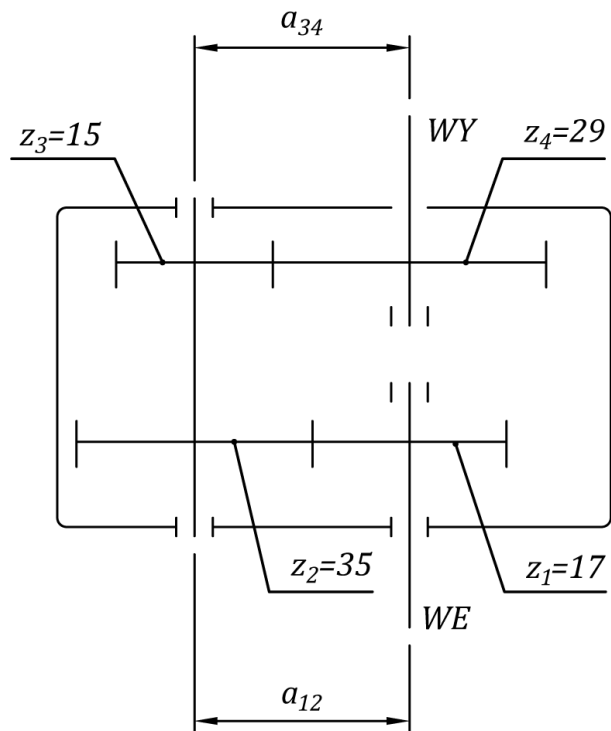
W tym przypadku tok obliczeń jest taki jak dla przypadku 1, przy czym przyjmuje się od razu narzucone wartości współczynników przesunięcia zarysu np.: $x_1=x_2=0,5$.

Istnieją wykresy pozwalające na dobór sumy x_1+x_2 ze względu na dużą wytrzymałość na naciski i zginanie, duży wskaźnik przyporu czy wyrównanie własności zazębienia.

2.12. Przykłady korekcji P

Przykład 1: Reduktor współosiowy

Przykładem, w którym konieczne może okazać się zastosowanie korekcji P jest przypadek reduktora dwustopniowego, w którym wał wejściowy i wyjściowy muszą leżeć w tej samej osi (rysunek poniżej).



Do obliczeń przyjęto:

- nominalny kąt przyporu $\alpha_0=20^\circ$,
- zęby normalne $y=1$,
- moduł: $m_{12}=3$, $m_{34}=3,5$.

Na podstawie znanych z wykładu zależności oblicza się zerowe odległości osi:

$$a_{012}=78\text{mm},$$

$$a_{034}=77\text{mm}.$$

Korygujemy zatem parę z_3z_4 na odległość osi $a_r=78\text{mm}$ ($a_0=77\text{mm}$). Korzystając ze wzoru (3) uzyskujemy wartość tocznego kąta przyporu

$$\alpha_r=21,9293^\circ$$

Następnie ze wzoru (4)

$$x_1+x_2=0,299$$

Pozorna odległość osi

$$a_p=78,0469\text{mm}$$

wobec czego skrócenie głowy zęba

$$k_m=0,0496\text{mm}$$

Dzieląc przez moduł, współczynnik skrócenia głowy zęba

$$k=0,0134.$$

Współczynnik k jest mniejszy od współczynnika luzu wierzchołkowego $c=(0,2-0,25)m$. Rzeczywisty

luz wierzchołkowy w przekładni

$$0,2-0,013m=0,187m$$

jest dostatecznie duży, więc nie trzeba skracać głowy zęba.

Przykład 2: Znormalizowana odległość osi

Czasami zachodzi konieczność zachowania znormalizowanej odległości osi, lub dopasowania odległości osi do istniejącej konstrukcji. Jako przykład rozpatrzmy przekładnię walcową o następujących danych:

- $z_1=27$,
- $z_2=35$,
- $\alpha_0=20^\circ$,
- $y=1$,
- $m=4mm$.

Zerowa odległość osi

$$a_0=124mm.$$

Należy uzyskać odległość osi znormalizowaną

$$a_{PN}=a_r=125mm.$$

Ze wzoru (3)

$$\alpha_r=21,2236^\circ$$

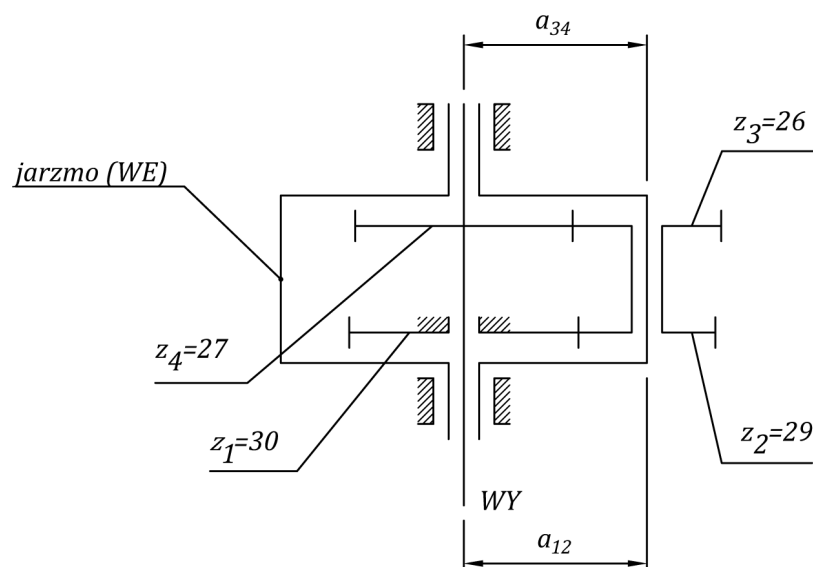
Stosując wzór (4) mamy

$$x_1+x_2=0,2574$$

W tym przypadku współczynnik skrócenia głowy zęba $k=0,0074$ również jest niewielki i nie zachodzi konieczność skracania głowy zębów.

Przykład 3: Reduktor obiegowy

Konieczność zachowania takiej samej odległości osi występuje również w przekładniach obiegowych. Jednym z przykładów może być przekładnia przedstawiona schematycznie poniżej.



Taki układ kinematyczny pozwala na uzyskanie stosunkowo dużego przełożenia redukcyjnego na jednym stopniu przekładni. W obliczeniach przyjęto

$$- \alpha_0=20^\circ,$$

$$- y=1,$$

$$- m_{12}=3\text{mm},$$

$$- m_{34}=3,5\text{mm}.$$

Oblicza się zerowe odległości osi:

$$a_{034}=92,75\text{mm},$$

$$a_{012}=88,5\text{mm}.$$

Korygujemy parę zębatą z_1z_2 na odległość osi 92,75mm, zatem

$$a_{r12}=a_r=a_{034}=92,75\text{mm}.$$

Podobnie jak w poprzednich przykładach uzyskuje się

$$\alpha_r=26,2809^\circ$$

$$x_1+x_2=1,6391$$

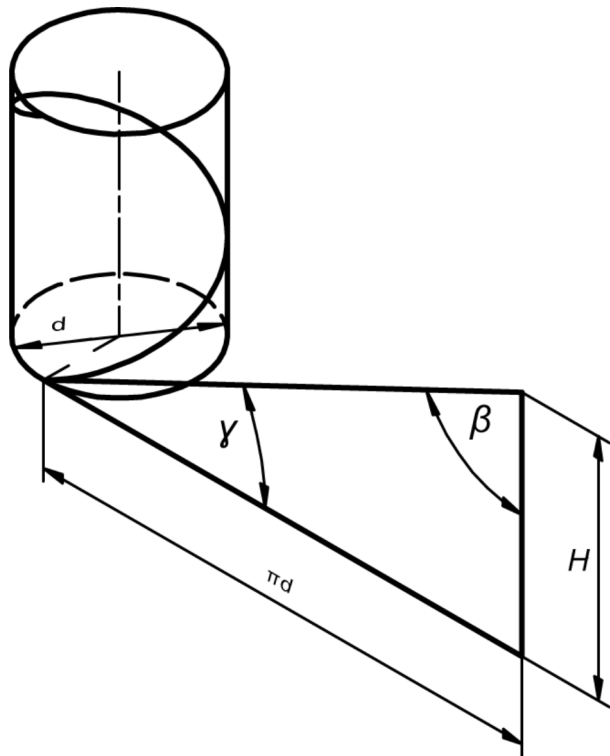
$$k=0,1907.$$

W tym przypadku współczynnik skrócenia głowy zęba przyjmuje znaczną wartość - porównywalną ze współczynnikiem luzu wierzchołkowego, wobec czego konieczne jest skrócenie głowy zęba.

3. Walcowe koła zębate o zębach śrubowych

3.1. Linia zęba

W kole zębatym z zębami śrubowymi (skośnymi) linia zęba jest linią śrubową. Linię śrubową można uzyskać poprzez nawinięcie na walec trójkąta jak pokazano na poniższym rysunku.



Linia śrubowa zęba definiowana jest na średnicy podziałowej d poprzez kąt pochylenia β . Zgodnie z powyższym rysunkiem zachodzi zależność

$$H = \frac{\pi d}{\tan \beta}$$

gdzie H to skok linii śrubowej. Kąt pochylenia linii zęba staje się większy im większa jest średnica, zachodzi zatem nierówność

$$\beta_b < \beta < \beta_a$$

gdzie: β_b - to kąt pochylenia linii zęba na średnicy zasadniczej, β_a - to kąt pochylenia linii zęba na średnicy wierzchołków. Skok linii śrubowej zęba jest stały niezależnie od wysokości, wobec powyższego można zapisać

$$\tan \beta_y = \frac{d_y}{d} \tan \beta$$

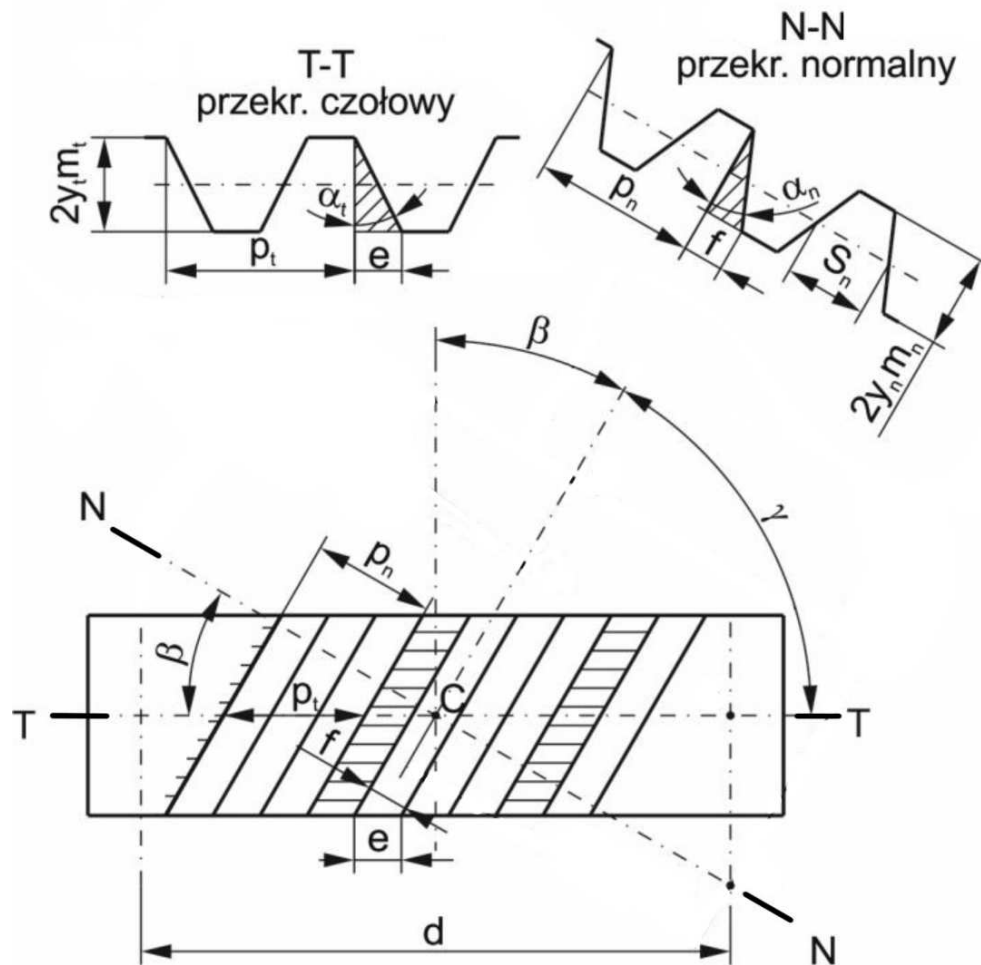
gdzie β_y - to kąt pochylenia linii zęba na średnicy dowolnej, d_y to średnica dowolna. Wykorzystując powyższą zależność przy założeniu, że $d_y = d_b = d \cos \alpha_t$ otrzyma się

$$\tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha_t$$

gdzie d_b to średnica zasadnicza, α_t - czołowy kąt przyporu.

3.2. Moduł normalny i czołowy

W kole zębatych o zębach śrubowych występują dwa charakterystyczne przekroje. Jest to przekrój normalny (prostopadły do linii zęba) oraz czołowy (prostopadły do osi koła). Obydwa przekroje zaznaczono na poniższym rysunku.



Parametry definiowane w przekroju czołowym oznaczane są indeksem "t". Parametry odnoszące się natomiast do przekroju normalnego indeksem "n". Wobec powyższego wyróżnia się podziałkę czołową p_t i podziałkę normalną p_n . Zgodnie z rysunkiem zachodzi związek

$$p_n = p_t \cos \beta$$

Podziałki czołowa i normalna mogą być wyrażone poprzez moduł czołowy m_t i moduł normalny m_n jako

$$p_n = \pi m_n$$

$$p_t = \pi m_t$$

Na tej podstawie uzyskuje się zależność pomiędzy modułem czołowym a normalnym w postaci

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

Należy pamiętać, że modułem znormalizowanym jest moduł normalny ($m_n = m_{PN}$), natomiast koło zębate wymiarowane jest w przekroju czołowym. Na podstawie tych informacji określa się parametry koła zębatego śrubowego:

- średnica podziałowa

$$d = m_t z$$

- średnica wierzchołków

$$d_a = d + 2h_a$$

$$h_a = y_n m_n$$

- średnica dna wrębów

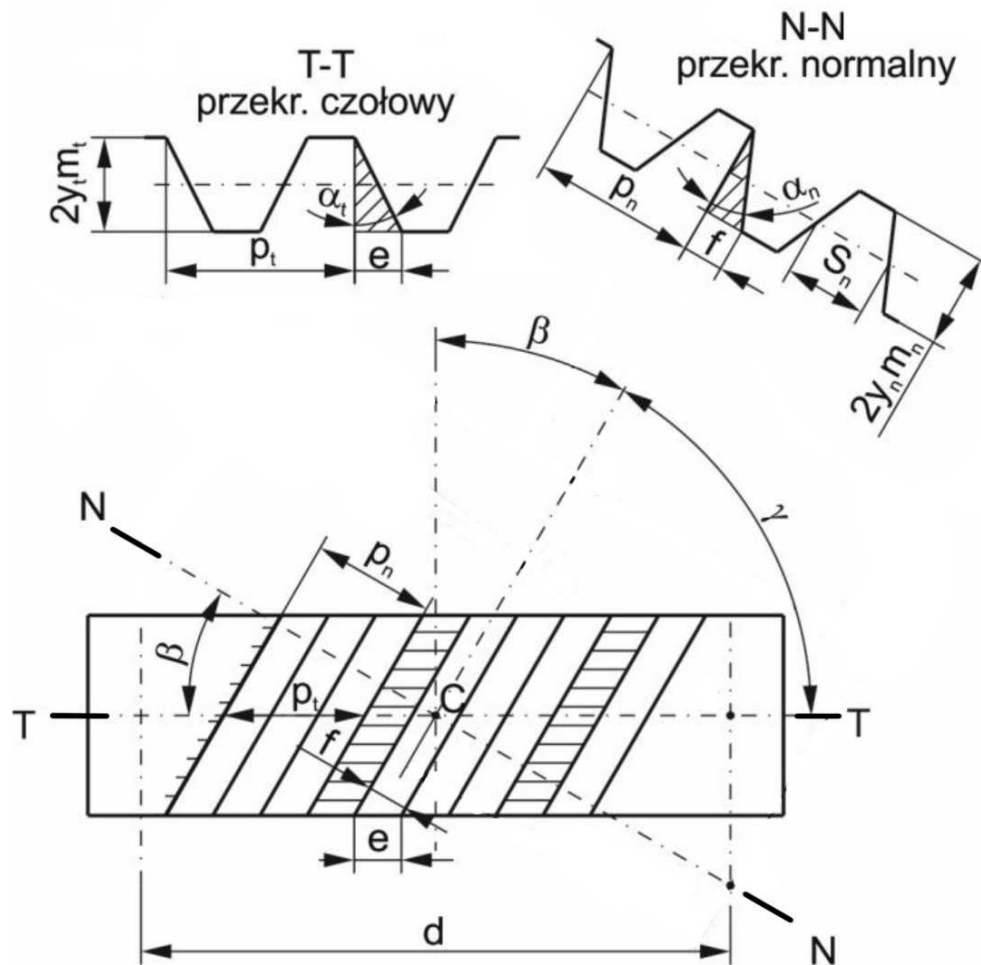
$$d_f = d - 2h_f$$

$$h_f = (y_n + c^*) m_n$$

Wysokość zęba w przekroju normalnym i czołowym są takie same. Koła zębate śrubowe wykonywane są na ogół w przekroju normalnym takimi samymi narzędziami jak koła o zębach prostych.

3.3. Kąt zarysu

Jak wspomniano obróbka uzębienia śrubowego przebiega w przekroju normalnym. Wobec tego w tym przekroju występuje nominalny kąt zarysu (kąt zarysu narzędzia) i to właśnie on najczęściej wynosi $\alpha_n = 20^\circ$. Na poniższym rysunku przedstawiono przekrój normalny i czołowy.



Na podstawie rysunku można zapisać

$$\frac{e}{h} = \operatorname{tg} \alpha_t$$

$$\frac{f}{h} = \operatorname{tg} \alpha_n$$

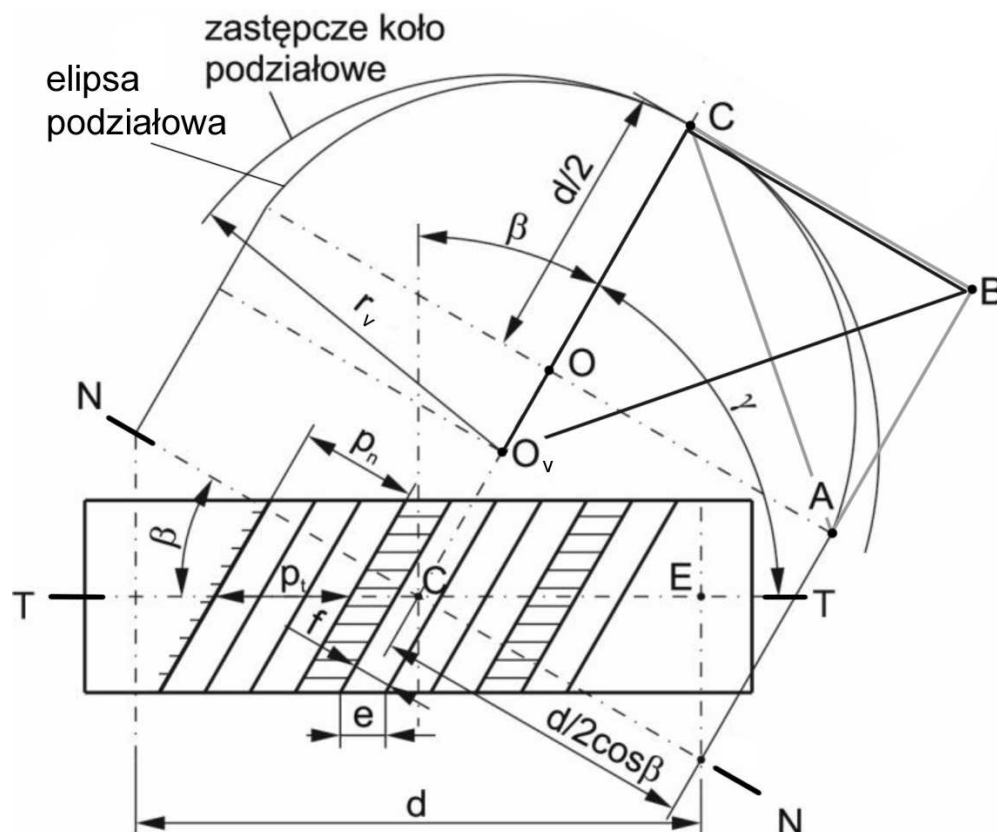
gdzie $h = 2y_{tm_t} = 2y_{nm_n}$ to całkowita wysokość zęba. Na tej podstawie uzyskuje się czołowy kąt przyporu na średnicy podziałowej

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}$$

W kole zębatym o zębach śrubowych ewolwenta kołowa (odwinięta z okręgu) występuje w przekroju czołowym. W przekroju normalnym występuje ewolwenta odwinięta z elipsy.

3.4. Zastępcza liczba zębów

Zastępcza liczba zębów to liczba zębów jaką można naciąć na obwodzie koła zastępczego o promieniu r_v . Konstrukcja koła zastępczego, który przybliża elipsę podziałową w przekroju normalnym przedstawiono na poniższym rysunku.



Na podstawie podobieństwa trójkątów czerwonego i zielonego można zapisać

$$\frac{\overline{O_v C}}{\overline{C B}} = \frac{\overline{C B}}{\overline{B A}} \Rightarrow \overline{O_v C} = \frac{\overline{C B}^2}{\overline{B A}}$$

Uwzględniając, że

$$\overline{O_v C} = r_v = 0,5 m_n z_v$$

$$\overline{C B} = \frac{d}{2 \cos \beta} = \frac{m_n z}{2 \cos^2 \beta}$$

$$\overline{B A} = \frac{d}{2} = 0,5 \frac{m_n z}{\cos \beta}$$

otrzymuje się wzór na zastępczą liczbę zębów w postaci

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

3.5. Graniczna liczba zębów

Graniczna liczba zębów w kołach śrubowych określona jest wzorem

$$z_{g\beta} = y_n \frac{2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha_n}$$

Graniczna liczba zębów jest tym mniejsza im większy jest kąt pochylenia linii zębów.

3.6. Odległość osi

Odległość osi kół o zębach śrubowych oblicza się ze wzoru

$$a = 0,5 \frac{m_n}{\cos \beta} (z_1 + z_2)$$

Przykład

Rozpatrzmy przekładnię o danych:

$$z_1=30, z_2=47, \beta=22^\circ, m_n=3\text{mm}$$

Zgodnie z podanym wzorem

$$a=124,57\text{mm}$$

Chcąc uzyskać znormalizowaną odległość osi $a_{PN}=125\text{mm}$, przekształcamy wzór do postaci

$$\cos \beta = 0,5 \frac{m_n}{a_{PN}} (z_1 + z_2) = 0,924$$

i wyznaczamy nowy kąt pochylenia, który zapewni pożądaną odległość osi

$$\beta = 22,4820^\circ$$

3.7. Liczba przyporu

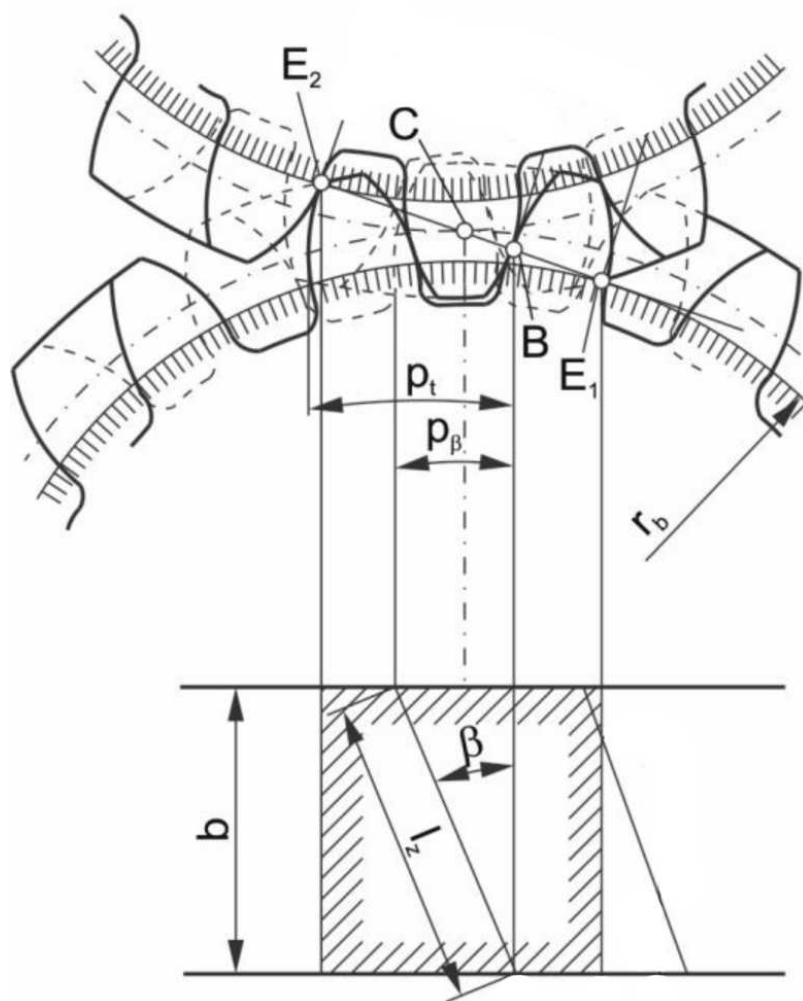
W kołach z zębami o linii śrubowej liczba przyporu wyraża się wzorem

$$\epsilon_{\gamma} = \epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta}$$

gdzie:

- ϵ_{α} to czołowa liczba przyporu,
- ϵ_{β} to poskokowa liczba przyporu (poskokowy wskaźnik zazębienia).

Pierwszy z tych składników wyznacza się i interpretuje podobnie jak w przypadku zębów prostych. Poskokowa liczba przyporu określa natomiast ile zębów współpracuje z uwagi na ich linię śrubową. Liczbę tę wyznacza się na podstawie poniższego rysunku.



Poskokowy wskaźnik zazębienia wyraża się jako iloczyn poskoku i podziałki czołowej

$$\epsilon_{\beta} = \frac{p_{\beta}}{p_t}$$

Uwzględniając w powyższym wzorze zależności

$$p_t = \pi m_t = \pi \frac{m_n}{\cos \beta}$$

$$p_{\beta} = b t g \beta$$

uzyskuje się

$$\epsilon_{\beta} = \frac{b \sin \beta}{\pi m_n}$$

Poskokowy wskaźnik przyporu rośnie wraz ze wzrostem współczynnika szerokości wieńca $\Psi = b/m_n$ oraz kąta pochylenia linii zębów β .

Przykład

Dla przekładni z poprzedniego przykładu:

$$z_1=30, z_2=47, m_n=3\text{mm}, \beta=22,4820^\circ, \alpha_n=20^\circ, y_n=1, b=30\text{mm}$$

całkowita liczba przyporu wynosi

$$\epsilon_{\gamma} = \epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta} = 1,518 + 1,217 = 2,736$$

Przy czym jeżeli ta przekładnia została wykonana w wariacie z zębami prostymi ($\beta=0$) liczba przyporu wynosiłaby

$$\epsilon_{\gamma} = \epsilon_{\alpha} = 1,697$$

co świadczy o tym, że w przekładni z zębami śrubowymi jednocześnie współpracuje większa liczba zębów niż dla przekładni z zębami prostymi.

3.8. Wady i zalety kół zębatych o zębach śrubowych

Koła zębate śrubowe w stosunku do kół zębatych o zębach prostych posiadają praktycznie same zalety:

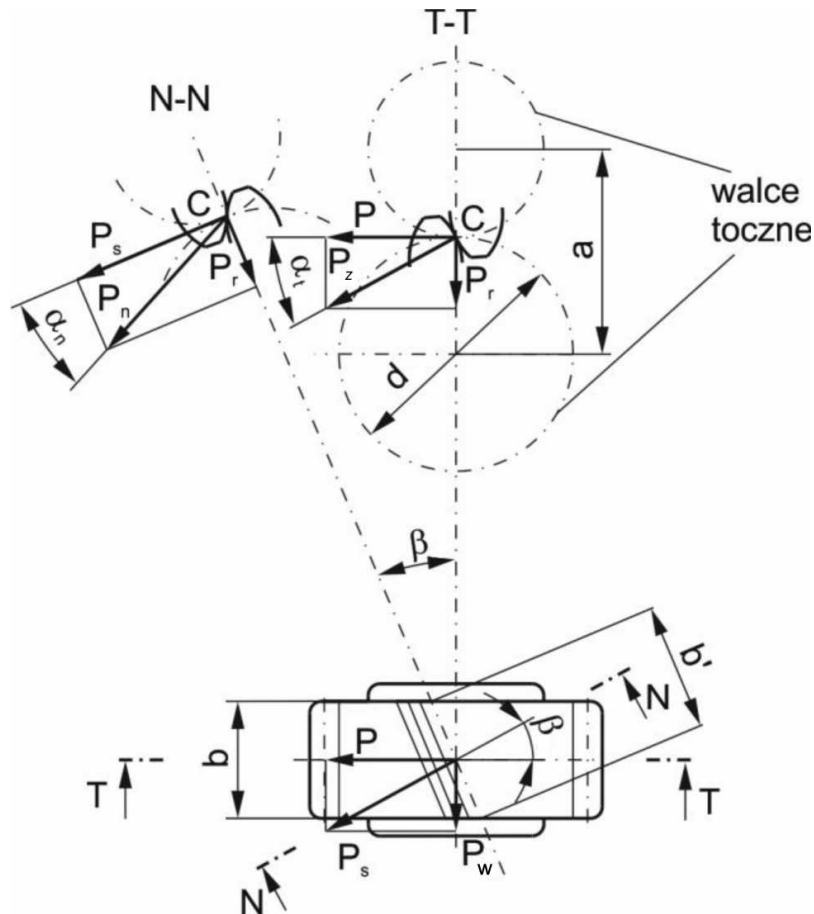
- zdecydowanie większa liczba przyporu (większa wytrzymałość zębów),
- większa cichobieżność (generowanie drgań o mniejszej amplitudzie),
- możliwość doboru odległości osi poprzez wartość kąta pochylenia linii zębów.

Wadą są występujące siły poosiowe, które muszą przejść łożyska.

4. Wytrzymałość kół zębatach

4.1. Rozkład sił w przekładni zębatej

Rozkład sił w przekładni walcowej przedstawiono poniżej.



W przekładni zębatej występują siły:

- siła obwodowa

$$P = \frac{2M}{d}$$

- siła promieniowa

$$P_r = P \tan \alpha_t$$

- siła wzdłużna

$$P_w = P \tan \beta$$

- siła normalna do boku zęba

$$P_n = \frac{P}{\cos \alpha_n \cos \beta}$$

- siła prostopadła do linii zęba

$$P_s = \frac{P}{\cos \beta}$$

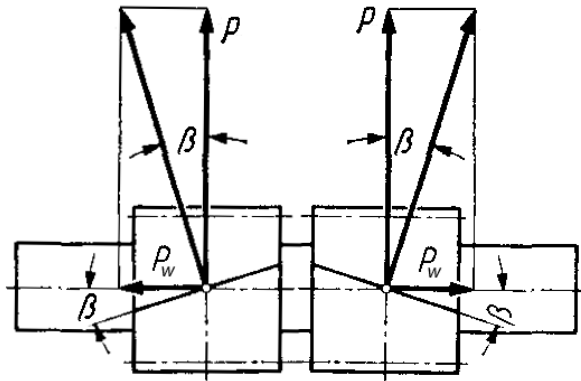
- siła wzdłuż linii przyporu

$$P_z = \frac{P}{\cos \alpha_t}$$

Dla kół o zębach prostych: $\beta=0^\circ$, $\alpha_n=\alpha_t=\alpha$ (dla kół korygowanych $\alpha=\alpha_t$).

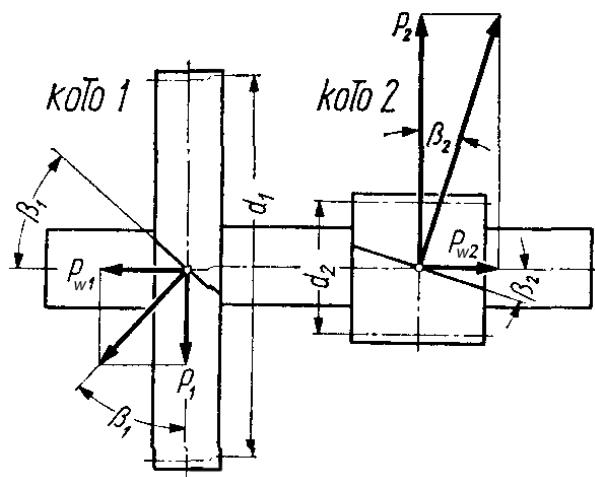
4.2. Równoważenie siły wzdłużnej

W przypadku kół zębatych o śrubowej linii zęba występuje siła wzdłużna, którą muszą przenieść łożyska. Istnieją sposoby na jej równoważenie. Pierwszym z nich jest zastosowanie koła zębatego daszkowego (rysunek poniżej).



Koło takie posiada dwa uzębienia o przeciwnych kierunkach pochylenia linii zębów. Pozwala to na częściowe, co wynika z nierównomierności przenoszenia obciążenia przez każde z uzębień, wyrównoważenie sił wzdłużnych. Aby zapewnić jak największą równomierność, a tym samym w jak największym stopniu zredukować wypadkową siłę wzdłużną działającą na wał stosuje się pływający układ łożyskowania na jednym z wałów z kołami daszkowymi.

Kolejną możliwością zrównoważenia sił wzdłużnych jest odpowiedni dobór kątów pochylenia linii zębów na wale pośrednim, co pokazano na rysunku poniżej.



Aby siły wzdłużne były równe co do wartości musi zachodzić warunek

$$\frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

Na podstawie tego warunku, znając np.: kąt β_1 można wyznaczyć wartość kąta β_2 , która zapewni zrównoważenie sił wzdłużnych.

4.3. Zastępcze obciążenie zęba

Zastępcze obciążenie zęba jest to maksymalna wartość siły obwodowej jaka może wystąpić podczas pracy przekładni. Uwzględnia ona zwiększenie wartości siły nominalnej wynikającej zarówno z wewnętrznych jak i zewnętrznych zjawisk dynamicznych. Wyraża się wzorem

$$P_{zast} = C_p C_d P$$

Współczynnik C_p to współczynnik przeciążenia. Uwzględnia charakter pracy przekładni, rodzaj napędu oraz maszyny napędzanej. Przy ustalaniu jego wartości można korzystać z poniższych tabel.

Wartości współczynnika przeciążenia C_p wg Dudley'a

Charakter pracy silnika	Charakter pracy napędzanej maszyny		
	równomierny	średnie uderzenia	duże uderzenia
Równomierny	1	1,25	1,75
Lekkie uderzenia	1,10	1,35	1,80
Średnie uderzenia	1,25	1,50	1,85

Wartości współczynnika przeciążenia C_p wg Niemann'a

Napędzane maszyny lub mechanizmy	Silnik napędowy		
	elektryczny	turbina, silnik wielocylindrowy	silnik jednocylindrowy
Prądnice, przenośniki, dmuchawy, wyściagi, mieszalniki	1,0	1,25	1,5
Obrabiarki, suwnice, pompy tłokowe	1,25	1,50	1,75
Prasy, nożyce, walcarki, koparki	1,75	2,0	2,25

Wartości współczynnika przeciążenia C_p wg Henriota

Napęd	Charakter obciążenia odbiornika	Liczba godzin pracy na dobę	
		do 12	24
Silniki elektryczne Turbiny	I	1	1,05
	II	1,25	1,45
	III	1,5	1,75
Silniki spalinowe wielocylindrowe	I	1,25	1,45
	II	1,5	1,75
	III	1,75	2,25
Silniki spalinowe jednocylindrowe	I	1,5	1,75
	II	1,75	2,25
	III	2,25	2,85

	Charakter obciążenia		
	I prawie bez wahań	II z wahaniami umiarkowanymi	III z silnymi wahaniami
Napędzane maszyny lub mechanizmy	prądnice elektryczne mechaniczny posuw obrabiarki przenośniki taśmowe lekke dźwignice turbodmuchawy turbosprężarki mieszalniki do produktów jednorodnych	napędy główne obrabiarek ciężkie dźwignice żurawie wentylatory kopalniane mieszalniki do produktów niejednorodnych wielostopniowe pompy tłokowe walcarki ciągłe	prasy do tłoczenia nożyce klatki walcownicze koparki ciężkie wirówki wielkie pompy

Współczynnik C_d to współczynnik nadwyżek dynamicznych, który uwzględnia wzrost siły wywołany wewnętrznymi zjawiskami dynamicznymi. Zależy on głównie od dokładności wykonania uzębienia i prędkości obwodowej. Można go obliczyć na podstawie wzorów wg poniższych tabel.

Wartości współczynnika C_d wg Henriota

Wielkości	Grupa dokładności			
	I	II	III	IV
v_{max} , m/s	100	50	20	5–10
Klasy dokładności kół	2–5	4–6	6–8	8–10
C_d	$1 + \frac{\sqrt{v}}{30}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{12}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{6}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{3}$

Wartości współczynnika C_d wg Ochęduszki

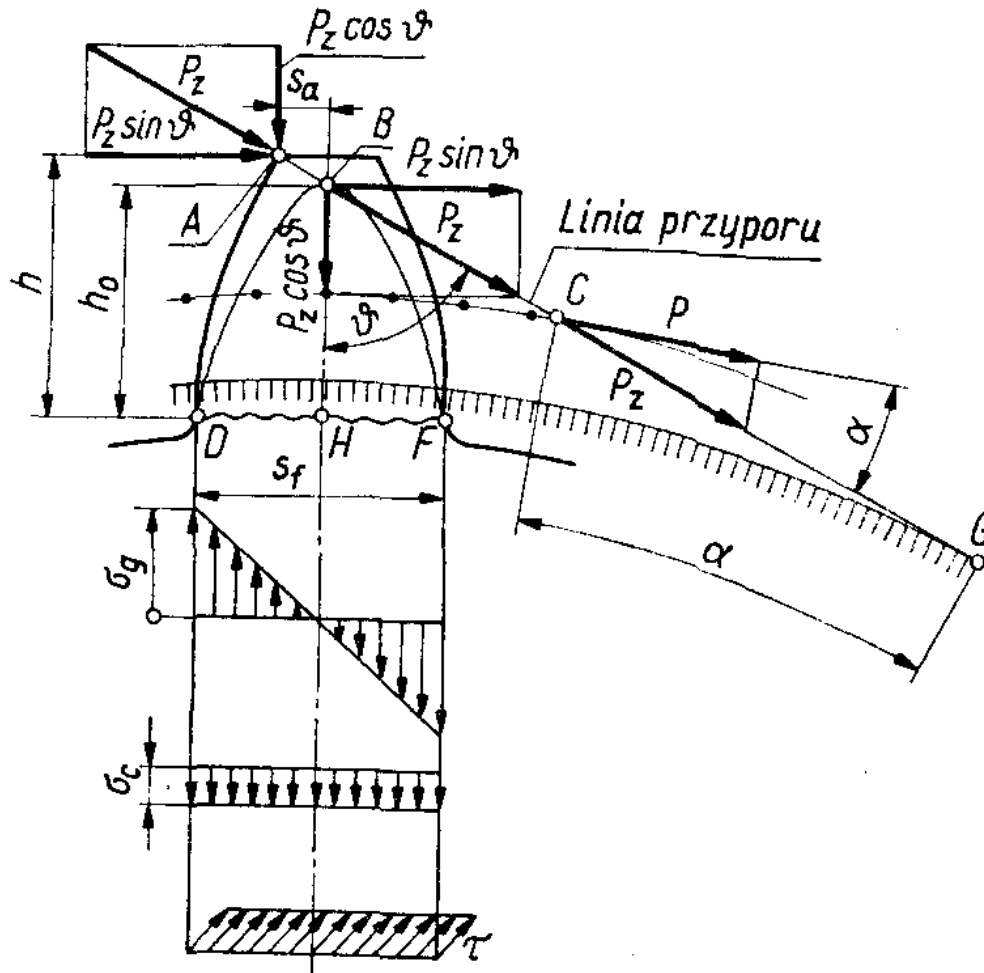
Wielkości	Grupa dokładności				
	I	II	III	IV	V
v , m/s	50–100	20–50	10–20	3–10	0–3
Klasy dokładności	2–5	4–6	6–8	8–10	10–12
C_d	$1 + \frac{\sqrt{v}}{30}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{16}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{10}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{7}$	$1 + \frac{\sqrt{v}}{4}$

4.4. Wyteżenie zębów prostych u podstawy

Obliczenia wytrzymałościowe zęba u jego podstawy prowadzi się dla najgorszego przypadku, w którym ząb pracuje u wierzchołka. Jak wiadomo wówczas współpracuje co najmniej dwie pary zębów. Wobec powyższego wprowadza się obliczeniową siłę

$$P_{obl} = \frac{P_{zast}}{\epsilon_{\alpha}}$$

Jest to zastępcza siła obwodowa podzielona przez liczbę przyporu. Schemat obciążenia zęba pokazano poniżej.



Ząb obciążony jest siłą P_z u wierzchołka. Siła ta biegnie wzdłuż linii przyporu i pochylona jest pod kątem ϑ do osi symetrii zęba. Ponadto pomiędzy siłą P_z a siłą obwodową (w tym przypadku obliczeniową siłą obwodową) zachodzi związek

$$P_z = \frac{P_{obl}}{\cos \alpha}$$

W wyniku działania siły P_z , u podstawy występują: naprężenia gnące σ_g , naprężenia ściskające σ_c , naprężenia styczne (ściananie) τ .

Zginanie

Moment gnący wywołany jest pionową i poziomą składową siły P_z i określa go zależność

$$M_g = P_z h_0 \sin \vartheta$$

Naprężenia gnące natomiast

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x} = \frac{P_z h_0 \sin \vartheta}{\frac{bs_f^2}{6}} = \frac{6P_z h_0 \sin \vartheta}{bs_f^2}$$

Ściskanie

Naprężenia ściskające wyraża zależność

$$\sigma_c = \frac{P_z \cos \vartheta}{bs_f}$$

Ścinanie

Ząb ścinany jest siłą obwodową, wobec czego

$$\tau = \frac{P_{obl}}{bs_f}$$

Naprężenia zredukowane

U podstawy zęba występuje złożony stan naprężenia. Zgodnie z hipotezą wytrzymałościową Hubera

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_g \pm \sigma_c)^2 + 3\tau^2}$$

Przyjmując, że wysokość obliczeniowa i grubość zęba u podstawy jest zależna od modułu oraz znaną już zależność na P_z :

$$h_0 = \varphi m$$

$$s_f = \xi m$$

$$P_z = \frac{P_{obl}}{\cos \alpha}$$

uzyskuje się naprężenia zredukowane w postaci

$$\sigma_{red} = \frac{P_{obl}}{bm} \sqrt{\left(\frac{6\varphi \sin \vartheta}{\xi^2 \cos \alpha} \pm \frac{\cos \vartheta}{\xi \cos \alpha}\right)^2 + \frac{3}{\xi^2}}$$

Przyjmując, że

$$q = \sqrt{\left(\frac{6\varphi \sin \vartheta}{\xi^2 \cos \alpha} \pm \frac{\cos \vartheta}{\xi \cos \alpha}\right)^2 + \frac{3}{\xi^2}}$$

to współczynnik wytrzymałości zęba u podstawy, a współczynnik $\lambda = 1/q$ to jego odwrotność można zapisać

$$\sigma_{red} = \frac{P_{obl}}{bm\lambda} \leq k_g$$

Wprowadzając współczynnik szerokości wieńca $\psi = b/m$ uzyskuje się nierówność

$$m \geq \sqrt{\frac{P_{obl}}{\psi \lambda k_g}}$$

Powyższa nierówność może posłużyć do oszacowania modułu kół zębatych wg warunku wytrzymałości zęba u podstawy. W literaturze można odnaleźć tablice współczynników

wytrzymałości zęba u podstawy dla różnych liczb zębów, kątów zarysu i współczynników przesunięcia zarysu.

Gdy naprężenia zredukowane są równe naprężeniom dopuszczalnym występuje równość

$$P_{obl} = b m \lambda k_g$$

4.5. Wyteżenie zębów śrubowych u podstawy

W przypadku kół zębatych o śrubowej linii zęba wprowadza się siłę obliczeniową w postaci

$$P_{obl} = \frac{P_{zast}}{C_{\beta}}$$

przy czym

$$C_{\beta} = \begin{cases} 1,3 & \text{dla } \epsilon_{\gamma} \leq 1,5 \\ 1,4 & \text{dla } \epsilon_{\gamma} > 1,5 \end{cases}$$

W przypadku kół o zębach śrubowych styk jest liniowy, a linia styku porusza się wzdłuż płaszczyzny zazębienia. Wywołuje to dodatkowe skręcanie zęba co uwzględnia się właśnie współczynnikiem C_{β} .

Warunek wytrzymałości u podstawy wyprowadza jak dla zębów prostych przy czym:

- siłą zginającą ząb jest siła prostopadła do linii zęba P_s ,
- szerokością obliczeniową jest długość zęba l_z ,
- wytrzymałość analizuje się w przekroju normalnym, występują zatem: m_n , z_v , λ_v .

Na podstawie ostatniego równania z poprzedniej strony, zgodnie z powyższymi uwagami można zapisać

$$P_s = \lambda_v m_n l_z k_g$$

Uwzględniając, że:

$$l_z = \frac{b}{\cos \beta}$$

$$P_s = \frac{P_{obl}}{\cos \beta}$$

$$b = \psi m_n$$

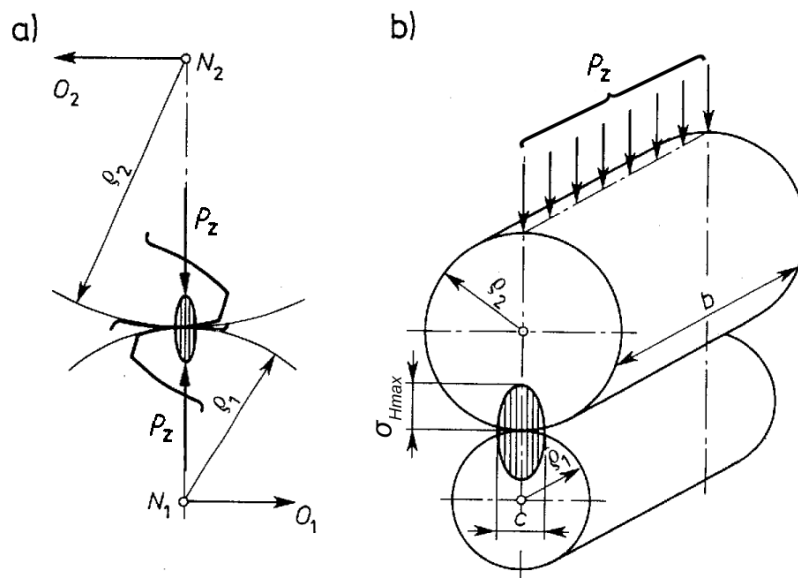
uzyskuje się:

$$m_n \geq \sqrt{\frac{P_{obl}}{\psi \lambda_v k_g}}$$

gdzie współczynnik wytrzymałości zęba u podstawy λ_v wyznacza się dla zastępczej liczby zębów z_v .

4.6. Wyteżenie zębów prostych na powierzchni

Zęby pracują w warunkach kontaktu zmęczeniowego. Pojawiające się naprężenia powierzchniowe gdy są zbyt duże mogą prowadzić do uszkodzeń powierzchni zębów np. do zjawiska zwanego pittingiem. Zjawisko to polega na powstawaniu na powierzchni zęba niewielkich jam, które powiększają się na skutek cyklicznie włączanego w nie oleju. Podczas projektowania przekładni zębatej należy sprawdzić wytrzymałość powierzchniową uzębienia. W tym celu przyjmuje się uproszczony model, w którym zarysy zębów zastępuje się ścisłkanymi z siłą P_z walcami, o promieniu równym promieniowi krzywizny w punkcie styku, o długość równą szerokości wieńca zębatego. Sprawdzenia dokonuje się na ogół dla jednoparowego przyporu (współpraca tylko dwóch zębów) w centralnym punkcie zazębienia C. Model obliczeniowy przedstawiono na poniższym rysunku.



Naprężenia wyznacza się na podstawie teorii Hertza dla liniowego styku dwóch ciał. Zgodnie z tą teorią maksymalne naprężenia powierzchniowe określa zależność

$$\sigma_{Hmax}^2 = \frac{2P_z}{0,5b(1/E_1 + 1/E_2)} 0,5 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{1}{2\pi(1-\nu^2)}$$

Uwzględniając w powyższym wzorze znane zależności

$$\rho_1 = 0,5d_1 \sin \alpha$$

$$\rho_2 = 0,5d_2 \sin \alpha$$

$$P_z = \frac{P_{zast}}{\cos \alpha}$$

można go przekształcić do postaci

$$\sigma_{Hmax} = C_{m,\alpha} \sqrt{\frac{P_{zast}}{bd_1} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right)} \leq k_H$$

gdzie k_H to naprężenia dopuszczalna wg Hertza, a

$$C_{m,\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{2E_1E_2}{E_1+E_2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}}$$

jest współczynnikiem uwzględniającym kąt zarysu oraz rodzaj zastosowanych materiałów (E_1 , E_2 to moduły Younga, ν to współczynnik Poissona).

4.7. Wyteżenie zębów śrubowych na powierzchni

W przypadku zębów śrubowych wyprowadzenie warunku wytrzymałości zęba na powierzchni jest podobne przy czym obliczenia prowadzi się w przekroju normalnym, wobec czego:

- zamiast średnicy podziałowej przyjmuje się zastępczą średnicę podziałową

$$d_{v1} = \frac{d_1}{\cos^2 \beta}$$

- zamiast siły P_z występuje siła normalna do zęba

$$P_n = \frac{P_{zast}}{\cos \alpha_n \cos \beta}$$

- zamiast szerokości wieńca przyjmuje się całkowitą długość styku

$$l_c = \epsilon_\alpha l_z = \epsilon_\alpha \frac{b}{\cos \beta}$$

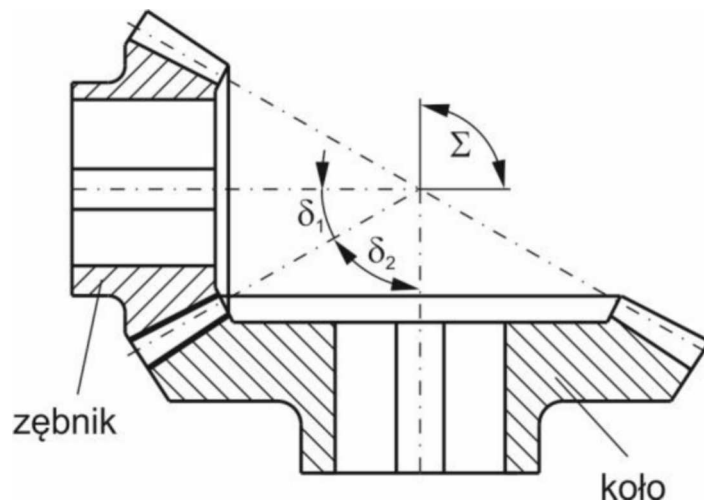
Uzyskuje się nierówność

$$\sigma_{Hmax} = C_{m,\alpha} \sqrt{\frac{P_{zast} \cos^2 \beta}{\epsilon_\alpha b d_1}} \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \leq k_H$$

5. Przekładnie zębate stożkowe

5.1. Wprowadzenie

Przekładnie stożkowe pozwalają na przenoszenie mocy pod pewnym kątem zwanym skrzyżowania osi co pokazano poniżej.



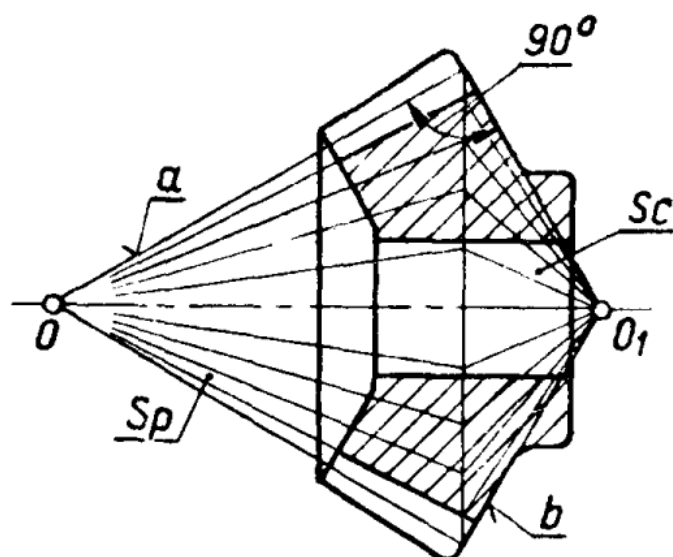
Koła zębate stożkowe można podzielić ze względu na linię zęba na koła:

- o zębach prostych,
- o zębach śrubowych,
- o zębach krzywoliniowych:
 - kołowo-łukowe (system Gleason),
 - epicykloidalne (system Oerlikon),
 - ewolwentowe (system Klingelnberg).

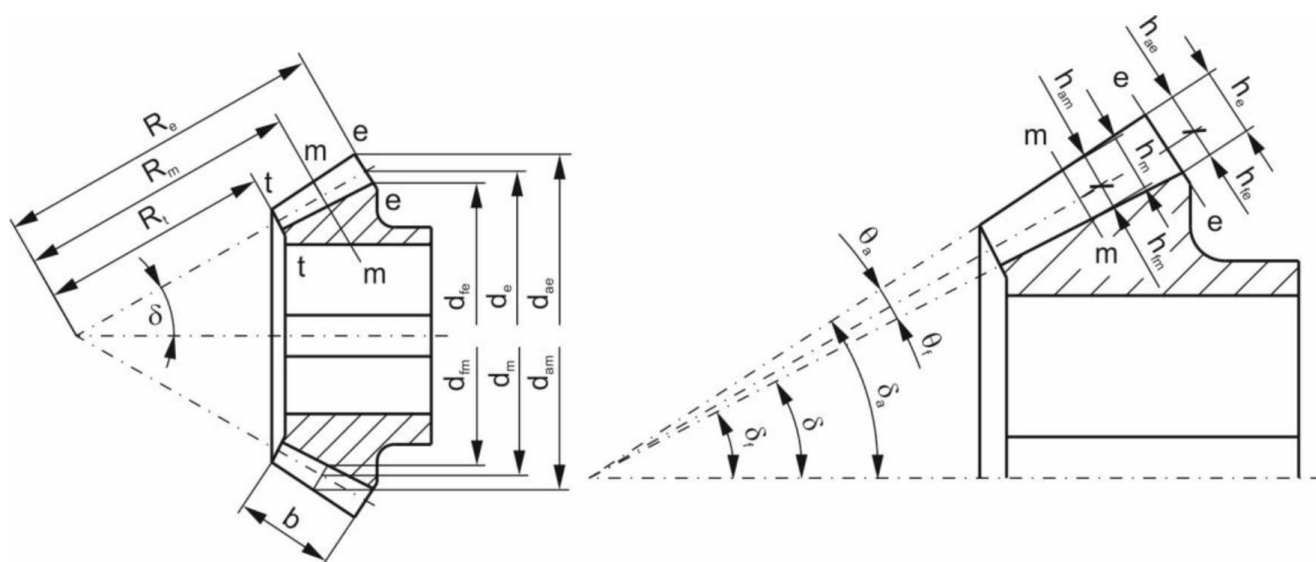
Stosowanie zębów krzywoliniowych w przekładniach stożkowych pozwala na zwiększenie ich nośności jak również posiada pewne zalety technologiczne np.: koła zębate o kołowo-łukowej linii zęba można szlifować. Przekładnie stożkowe stosowane są tam gdzie moc musi być przekazana pod kątem np.: w ogonowej przekładni śmigłowca. Na wykładzie omawiane będą jedynie koła o zębach prostych.

5.2. Parametry koła stożkowego

Koło zębate stożkowe przedstawiono poniżej.



W kole zębatych stożkowych występuje stożek podziałowy (Sp o tworzącej a) oraz stożek czołowy/dopełniający (Sc o tworzącej b). Punkt O jest wierzchołkiem stożka podziałowego. Wymiary uzębienia stożkowego przedstawiono poniżej.



Omawiane będzie uzębienie zbieżne. Oprócz stożka podziałowego występują również stożek dna (oznaczany indeksem f) i stożek wierzchołków (oznaczony indeksem a). Ponadto wyróżnia się trzy charakterystyczne przekroje:

- przekrój wewnętrzny (t - od strony "małych" modułów),
- przekrój średni (m - w połowie szerokości wieńca),
- przekrój zewnętrzny (e - od strony "dużych" modułów).

W każdym z tych przekrojów można zdefiniować średnicę wierzchołków, średnicę dna oraz moduł. Dla uzębienia zbieżnego moduł zmienia się wzdłuż szerokości wieńca zębatego. Poniżej zestawiono podstawowe parametry stożkowego koła zębatego:

- δ_f , δ , δ_a to półkąty rozwarcia stożka odpowiednio: dna, podziałowego i wierzchołków,
- θ_f , θ_a to kąty odpowiednio stopy oraz głowy zęba,
- m_e , m_m to moduł odpowiednio zewnętrzny oraz średni,
- h_{fe} , h_{ae} , h_e to wysokości odpowiednio stopy zęba, głowy zęba i zęba w przekroju zewnętrznym,

- h_{fm} , h_{am} , h_m to wysokości odpowiednio stopy zęba, głowy zęba i zęba w przekroju średnim,
- R_e , R_m to długości tworzących stożka podziałowego odpowiednio zewnętrzną i średnią.

Jak wspomniano moduł jest zmienny na szerokości zęba. Modułem znormalizowanym dla zębów prostych jest m_e , a dla zębów krzywoliniowych m_m . Wymiary uzębienia określa się wg poniższych zależności:

$$d_e = m_e z$$

$$d_m = m_m z$$

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae}$$

$$d_{fe} = d_e - 2h_{fe}$$

$$h_{ae} = y m_e$$

$$h_{fe} = (y + c^*) m_e$$

$$h_e = h_{ae} + h_{fe}$$

$$\delta_a = \delta + \theta_a$$

$$\delta_f = \delta - \theta_f$$

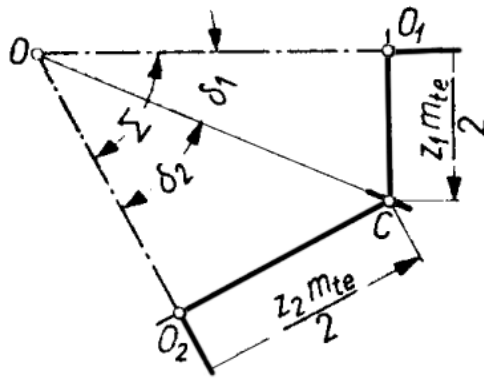
$$R_e = \frac{m_e z}{2 \sin \delta} = R_m + \frac{b}{2}$$

$$R_m = \frac{m_m z}{2 \sin \delta}$$

$$\frac{R_e}{R_m} = \frac{m_e}{m_m}$$

5.3. Kąty stożków podziałowych

Przekładnię stożkową o dowolnym kącie skrzyżowania osi Σ przedstawiono poniżej.



Rozpatrywana jest współpraca stożków podziałowych w przekroju zewnętrznym. Na podstawie rysunku można zapisać

$$\frac{O_1C}{OC} = \sin \delta_1$$

$$\frac{O_2C}{OC} = \sin \delta_2 = \sin(\Sigma - \delta_1)$$

Na podstawie powyższych równań

$$\frac{z_1}{\sin \delta_1} = \frac{z_2}{\sin(\Sigma - \delta_1)}$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznej powyższe równanie można sprowadzić do postaci

$$\operatorname{tg}[\delta_1] = \frac{\sin \Sigma}{z_2/z_1 + \cos \Sigma}$$

która pozwala na wyznaczenie stożka podziałowego koła 1 na podstawie kąta skrzyżowania osi oraz liczb zębów. Kąt stożka podziałowego koła 2 oblicza się jako

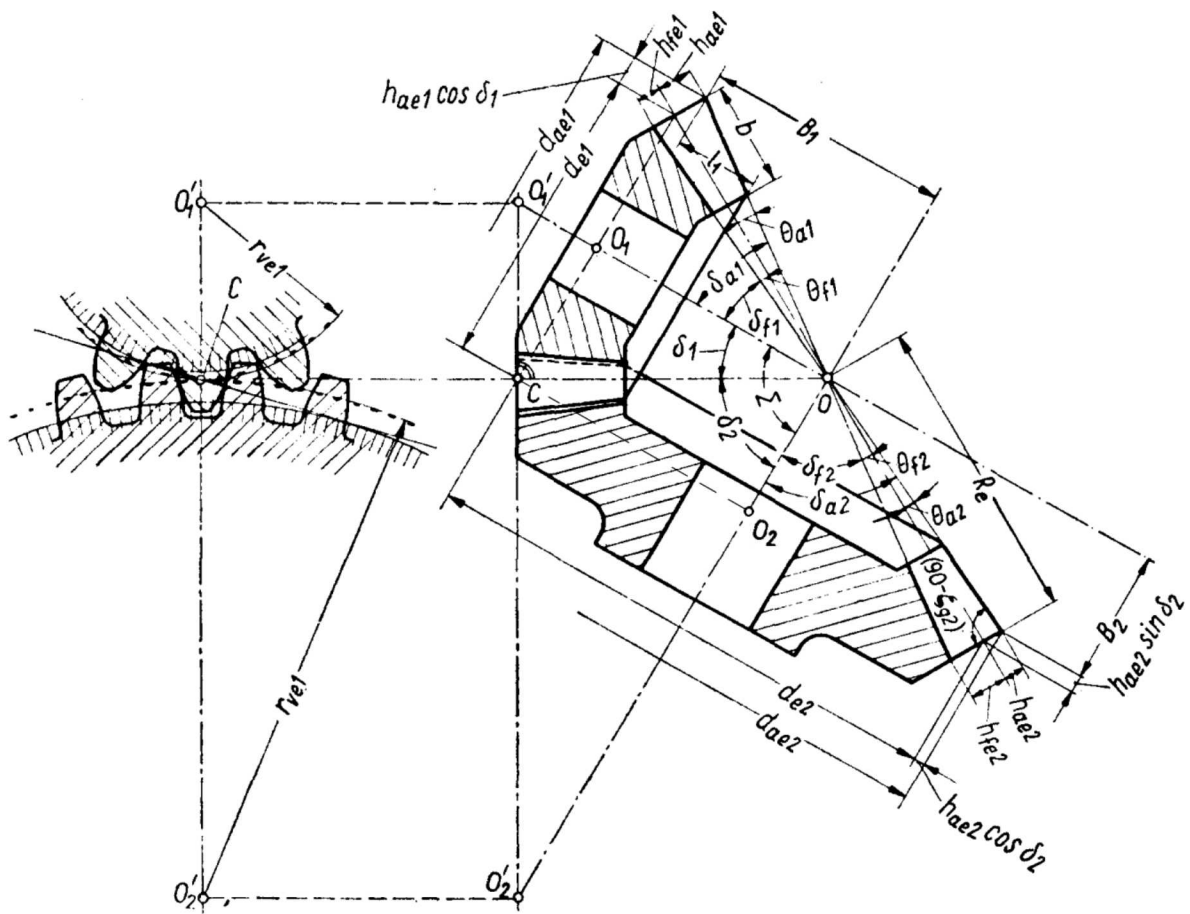
$$\delta_2 = \Sigma - \delta_1$$

Dla $\Sigma = 90^\circ$ (przypadek często występujący) zachodzi równość

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_1}{z_2}$$

5.4. Przekładnia zastępcza

Współpracę uzębienia stożkowego można analizować jak uzębienie walcowe o parametrach zastępczych. Walcową przekładnię zastępczą stożkowej pary zębatej przedstawiono poniżej.



Promienie podziałowe przekładni zastępczej są tworzącymi stożków dopełniających:

$$r_{ve1} = \frac{z_1 m_e}{2 \cos \delta_1}$$

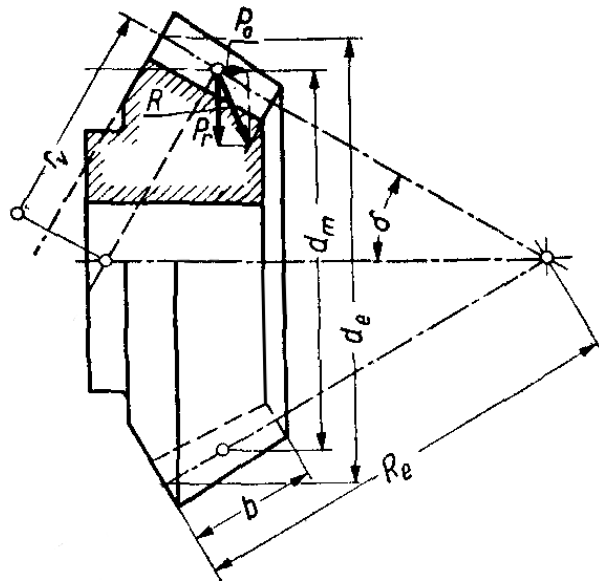
$$r_{ve2} = \frac{z_2 m_e}{2 \cos \delta_2}$$

Ponadto występują zastępcze liczby zębów

$$z_{v1,2} = \frac{z_{1,2}}{\cos \delta_{1,2}}$$

5.5. Rozkład sił

Siły obciążające wał wyznacza się w przekroju średnim (rys. poniżej).



Przyjmując, że

$$P = \frac{2M}{d_m}$$

to siła obwodowa, siły obciążające wał (siła osiowa i siła promieniowa) dane są jako

$$P_o = P \operatorname{tg} \alpha \sin \delta$$

$$P_r = P \operatorname{tg} \alpha \cos \delta$$

6. Przekładnie ślimakowe

6.1. Wprowadzenie

Przekładnie ślimakowe pozwalają na:

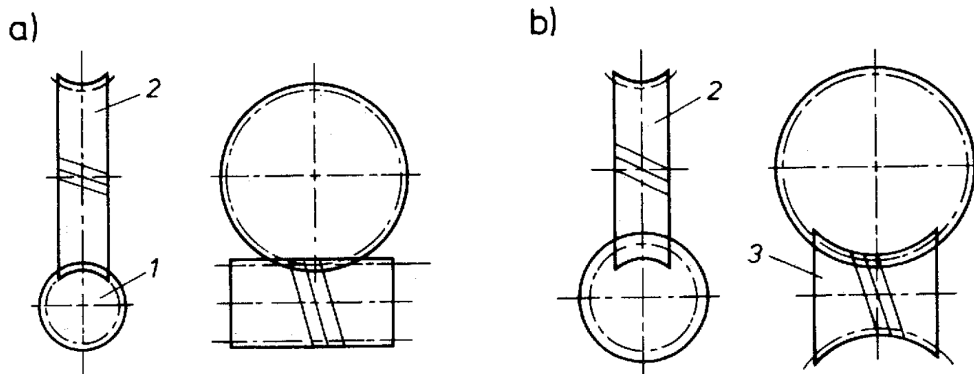
- przenoszenie ruchu obrotowego przy skrzyżowanych osiach (najczęściej $\Sigma=90^\circ$),
- uzyskanie bardzo dużego przełożenia ($i=150$ lub więcej),

Wadą przekładni ślimakowych jest ich zmniejszona sprawność, mogą być za to samohamowne co jest czasami zaletą.

Przekładnia ślimakowa składa się ze ślimaka i ślimacznicy. Ślimak jest śrubą modułową jedno lub wielokrotną (może posiadać jeden lub kilka zwojów). Ślimacznica jest natomiast kołem zębatym śrubowym której zęby są nacięte na wklęsłej powierzchni.

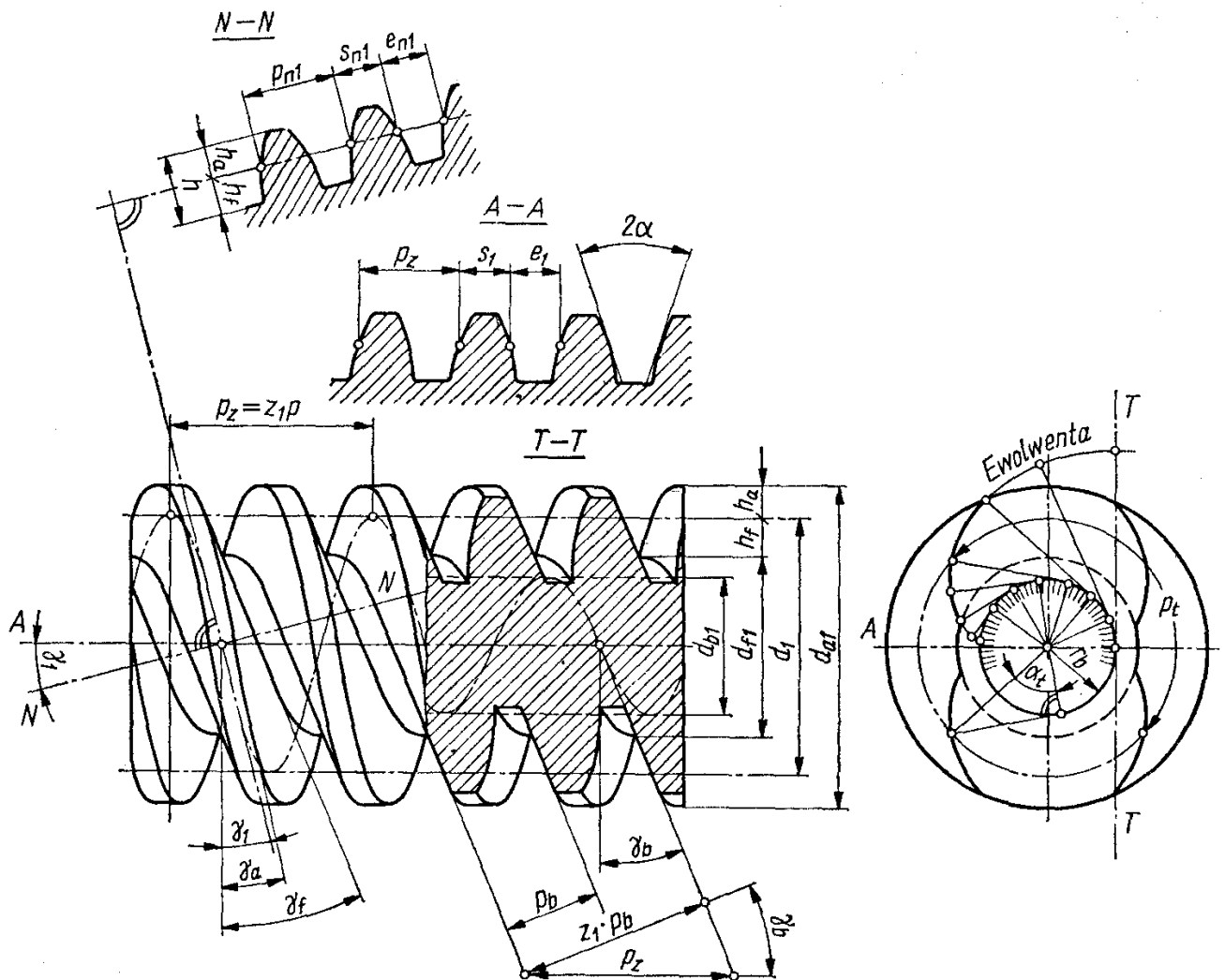
Wyróżnia się przekładnie:

- walcową (rys. a)),
- globoidalną (rys. b)).



6.2. Walcowa przekładnia ślimakowa

W tej przekładni zwoje ślimaka nacięte są na powierzchni walcowej jak pokazano poniżej (na przykładzie ślimaka ewolwentowego).



Parametry ślimaka można zdefiniować w przekroju osiowym (A-A). Wyróżnia się moduł osiowy m , który jest związany z podziałką osiową zależnością

$$p = \pi m$$

Skok ślimaka określa się jako

$$p_z = z_1 p$$

gdzie z_1 to krotność ślimaka (liczba zwojów). W przekroju normalnym natomiast definiuje się podziałkę i moduł normalny:

$$p_{n1} = p \cos \gamma_1$$

$$m_n = m \cos \gamma_1$$

Ponadto średnica podziałowa ślimaka to

$$d_1 = \frac{z_1 m}{\tan \gamma_1}$$

Podziałka w przekroju czołowym

$$p_{t1} = \frac{p}{\tan \gamma_1}$$

Podobnie jak w kole zebatym występują średnice i wysokości zębów:

- średnica wierzchołków

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1}$$

- średnica dna

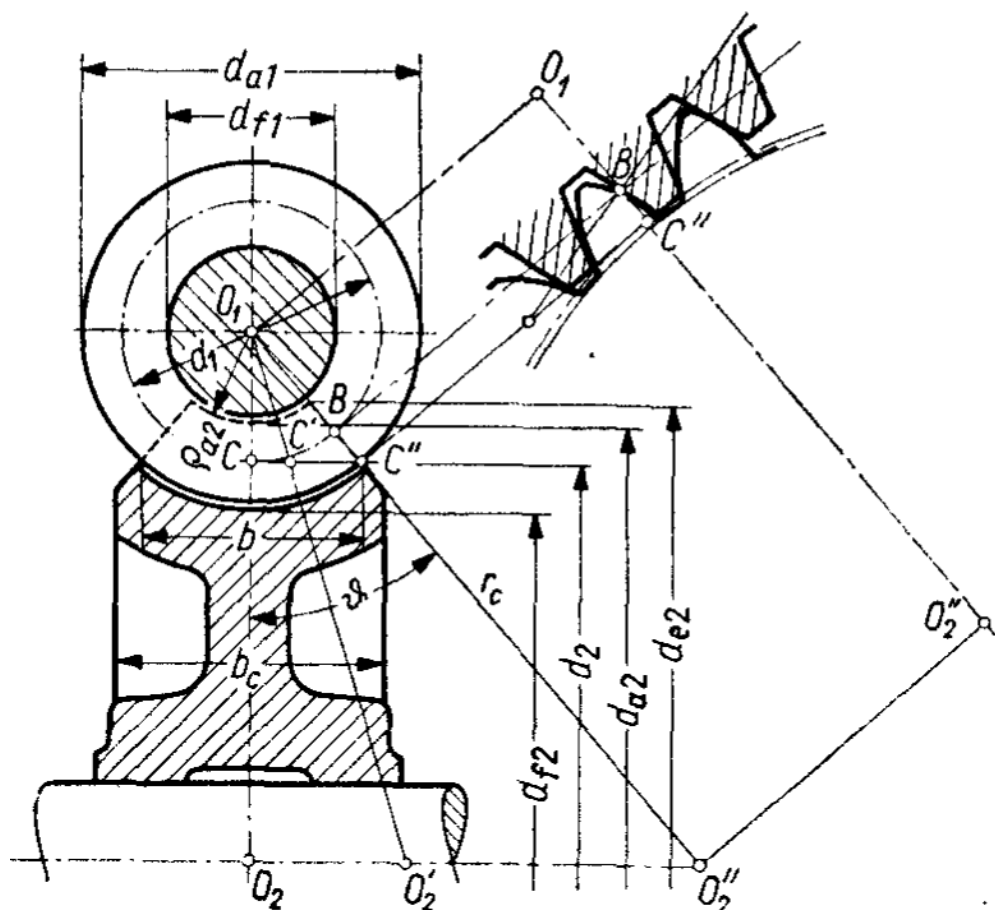
$$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1}$$

- wysokości zębów określa się na podstawie kąta wzniosu linii śrubowej

$$h_{a1} = \begin{cases} m, & \text{dla } \gamma_1 < 15^\circ \\ m_n, & \text{dla } \gamma_1 > 15^\circ \end{cases}$$

$$h_{f1} = \begin{cases} 1,2m, & \text{dla } \gamma_1 < 15^\circ \\ 1,2m_n, & \text{dla } \gamma_1 > 15^\circ \end{cases}$$

Parametry ślimacznic przedstawiono na poniższym rysunku.



Średnica podziałowa:

$$d_2 = z_2 m$$

gdzie z_2 to liczba zębów ślimacznicy.

Średnica wierzchołków:

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2}$$

Średnica dna:

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2}$$

Ponadto pomiędzy kątem wzniosu, a kątem pochylenia linii zębów ślimaka i ślimacznicy zachodzą równości:

$$\gamma_1 = \beta_2$$

$$\beta_1 = \gamma_2$$

Odległość osi w przekładni ślimakowej:

$$a = 0,5(d_1 + d_2)$$

6.3. Sprawność przekładni ślimakowej

W przypadku gdy elementem napędzanym jest ślimak sprawność określa poniższy wzór

$$\eta = \frac{tg \gamma_1}{tg(\gamma_1 + \rho')}$$

gdzie

$$tg \rho' = \mu' = \frac{\mu}{\cos \alpha_n}$$

a μ to współczynnik tarcia.

Natomiast gdy elementem napędzanym jest ślimacznica

$$\eta = \frac{tg(\gamma_1 - \rho)}{tg \gamma_1}$$

gdzie

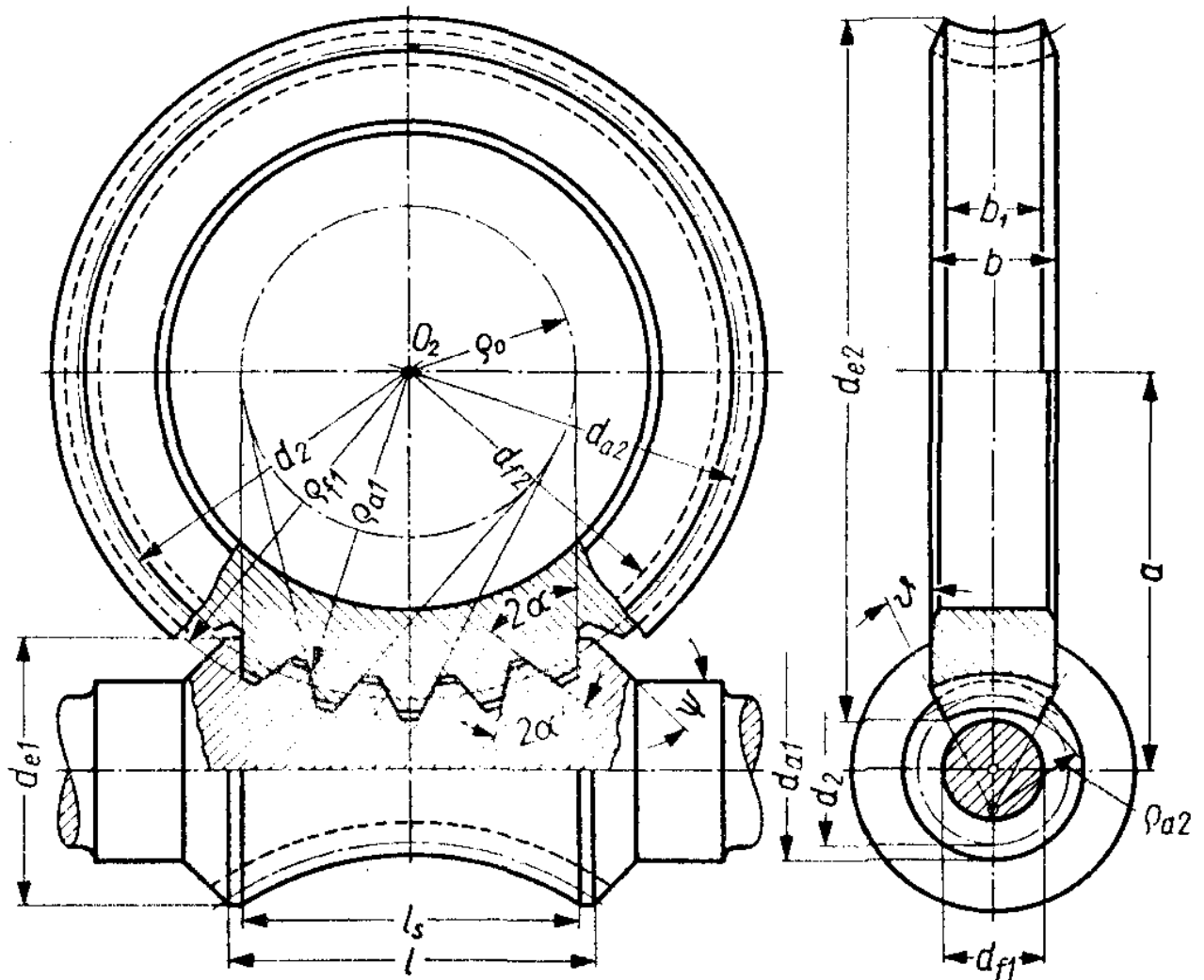
$$\mu = tg \rho$$

Samohamowność przekładni ślimakowej (brak możliwości napędzania przekładni od strony ślimacznicy) występuje wówczas gdy

$$\gamma_1 < \rho$$

6.4. Globoidalna przekładnia ślimakowa

Globoidalna przekładnia ślimakowa charakteryzuje się większym stopniem pokrycia, a co za tym idzie większą nośnością od walcowej przekładni ślimakowej. Przedstawiono ją na poniższym rysunku.



7. Przekładnie cierne

7.1. Wprowadzenie

Przenoszenie momentu z wału napędzającego na napędzany odbywa się dzięki sile tarcia. Zaletami przekładni ciernych są:

- prosta konstrukcja,
- łatwość w wykonaniu,
- możliwość ciągłej zmiany przełożenia (przekładnie bezstopniowe),
- możliwość pracy jako przekładnia bezpieczeństwa.

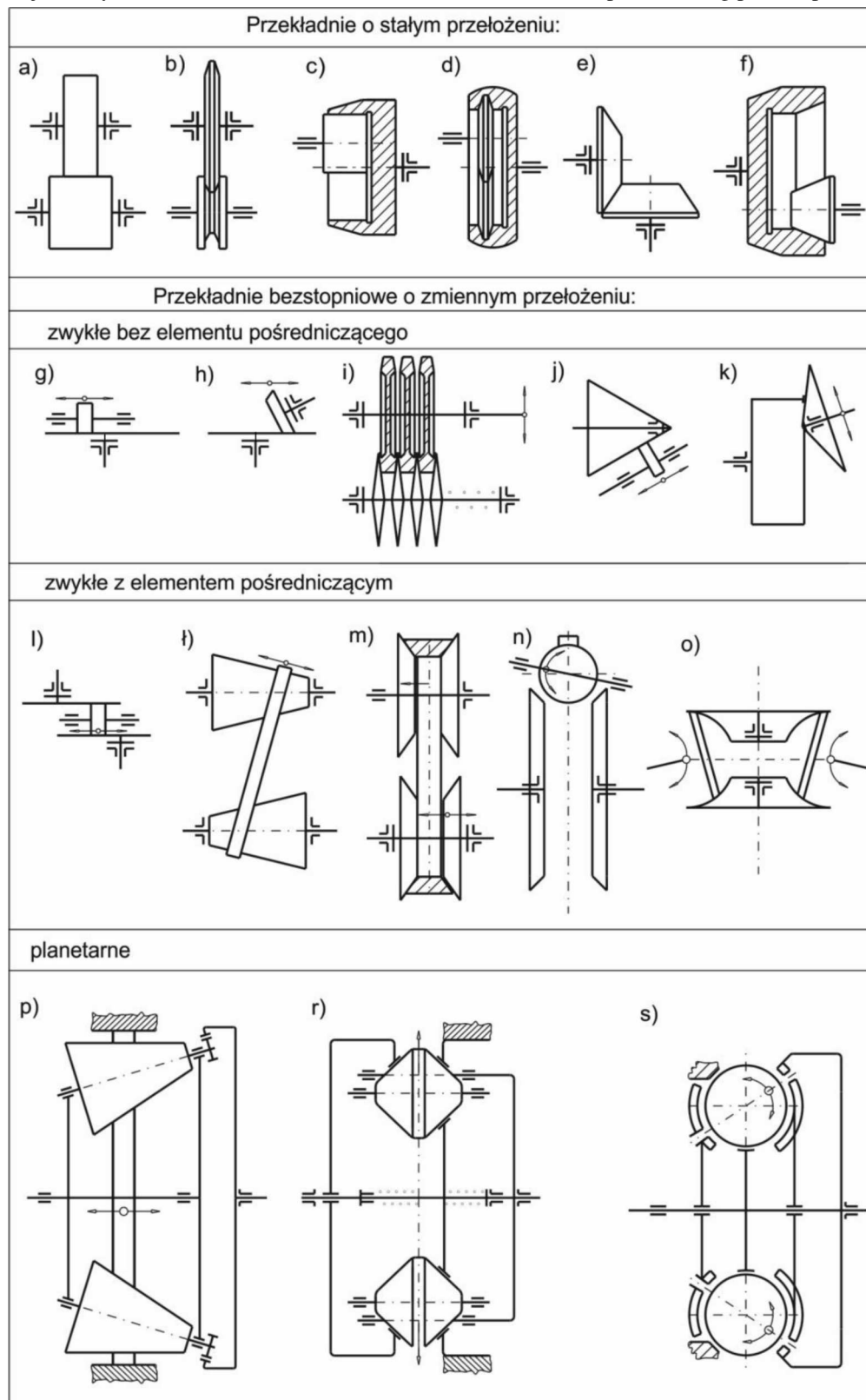
Do wad zalicza się:

- duże obciążenie wałów,
- brak stałości przełożenia,
- stosunkowo mała sprawność (60-70%, przy dokładnym wykonaniu do 95%).

Wyróżnia się przekładnie cierne:

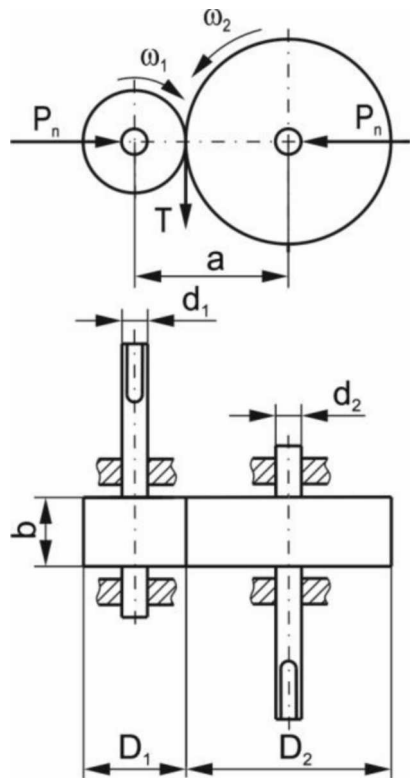
- o stałym przełożeniu
- o zmiennym przełożeniu (bezstopniowe).

Wybrane przykłady zestawiono na poniższym rysunku.



7.2. Walcowa przekładnia cierna

Walcową przekładnię cierną przedstawiono poniżej.



Moment z koła małego przenoszony jest na koło duże poprzez siłę tarcia

$$T = \mu P_n$$

gdzie μ to współczynnik tarcia, a P_n to siła docisku kół ciernych. Odległość osi oblicza się na podstawie średnic kół ciernych jako

$$a = 0,5(D_1 + D_2)$$

Teoretyczne przełożenie przekładni natomiast wyraża się wzorem

$$i = \frac{d_2}{d_1}$$

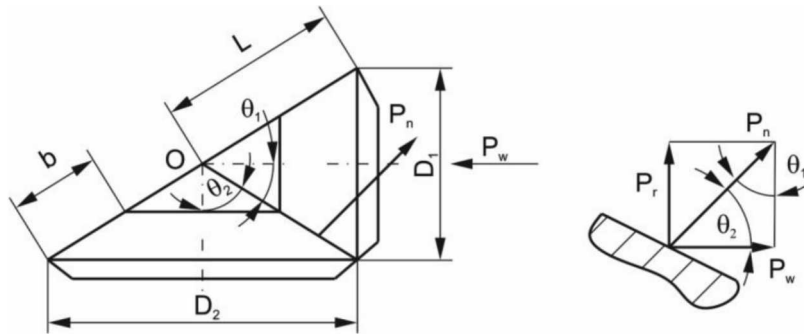
Szerokość kół b dobiera się tak aby zawierała się w przedziale od $0,2a$ do $0,4a$.

W związku z koniecznością zapewnienia siły docisku kół wały i łożyska przekładni obciążone są wypadkową siłą

$$P_p = \sqrt{T^2 + P_n^2}$$

7.3. Stożkowa przekładnia cierna

Stożkową przekładnię cierną przedstawiono poniżej.



Przełożenie przekładni oblicza się na podstawie średnic zewnętrznych jako

$$i = \frac{D_2}{D_1}$$

Uwzględniając długość tworzącej stożka L , przełożenie można wyrazić w funkcji półkąta rozwarcia stożków

$$i = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

8. Przekładnie pasowe

8.1. Wprowadzenie

Przekładnie pasowe są przekładniami ciągłowymi, w których ciągnem jest pas. Moment przekazywany jest poprzez sprzęgnięcie pasa z kołami pasowymi. Sprzęgnięcie to może być cierne (pas płaski/klinowy) lub kształtowe (pas zębaty).

Zaletami tego typu przekładni są:

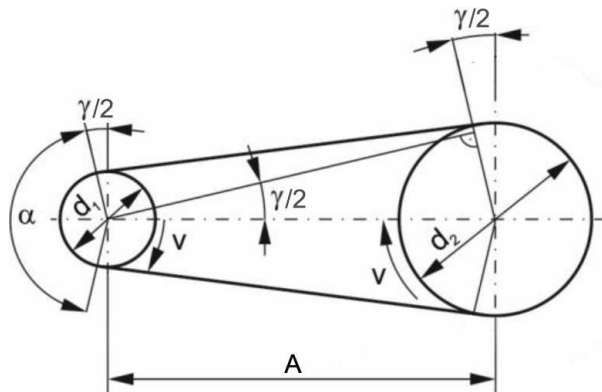
- prosta i tania konstrukcja,
- cicha praca,
- płynność ruchu,
- dowolność rozstawienia osi,

Do wad należą:

- duże rozmiary,
- duże obciążenia wałów (w przypadku sprzężenia ciernego),

8.2. Geometria przekładni pasowej

Schemat przekładni pasowej przedstawiono na rysunku poniżej.



d_1 i d_2 to obliczeniowe średnice małego i dużego koła (liczone do osi obojętnej/podziałowej pasa),

A - rozstaw osi,

α - kąt opasania koła małego,

γ - kąt rozwarcia cięgien,

Geometryczne przełożenie przekładni oblicza się jako

$$i = \frac{d_2}{d_1}$$

Na podstawie rysunku można zapisać zależność (1)

$$\cos(\alpha/2) = \frac{d_2 - d_1}{2A} \quad (1)$$

Ponadto sumując wszystkie częściowe długości łuków pasa wyprowadza się wzór na jego długość w postaci (2)

$$\frac{L}{d_2} = \frac{i-1}{i} \ln v \frac{\alpha}{2} + \pi \quad (2)$$

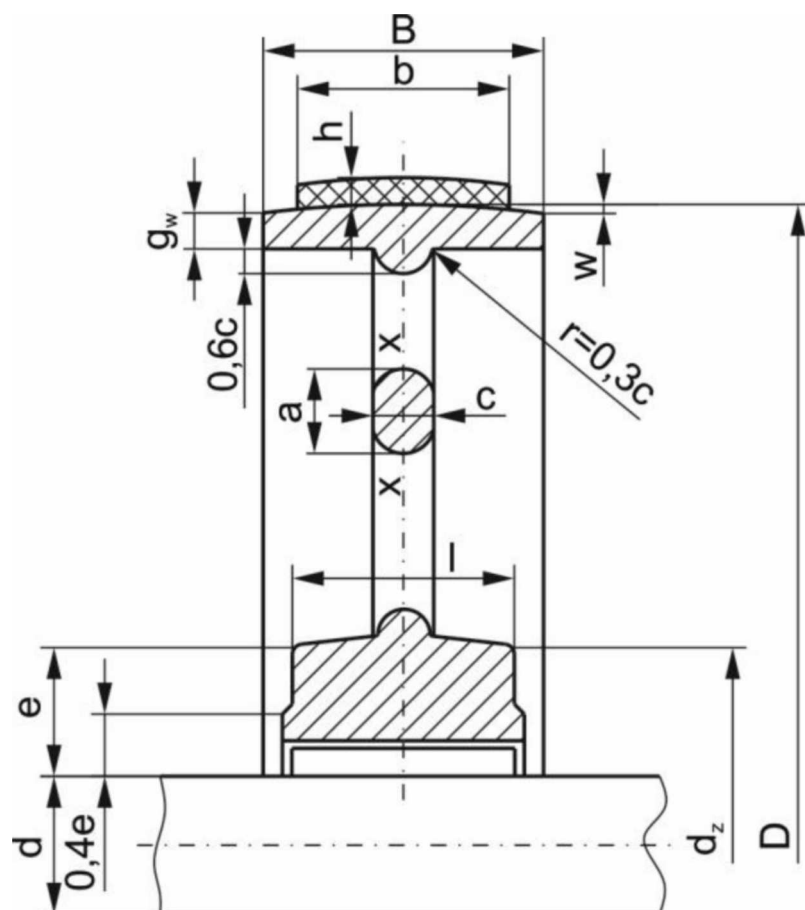
Na podstawie wzorów (1) i (2) można obliczyć:

- długość pasa L (znając odległość osi A),

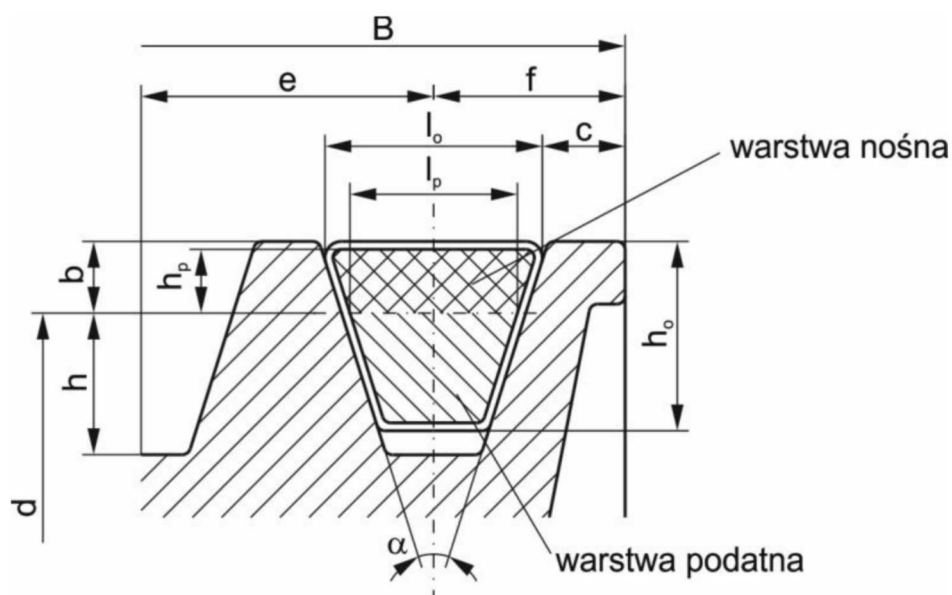
- odległość osi A (znając długość pasa L).

8.3. Przekładnie z pasem płaski i klinowym

Koło przekładni pasowej z pasem płaski przedstawiono poniżej



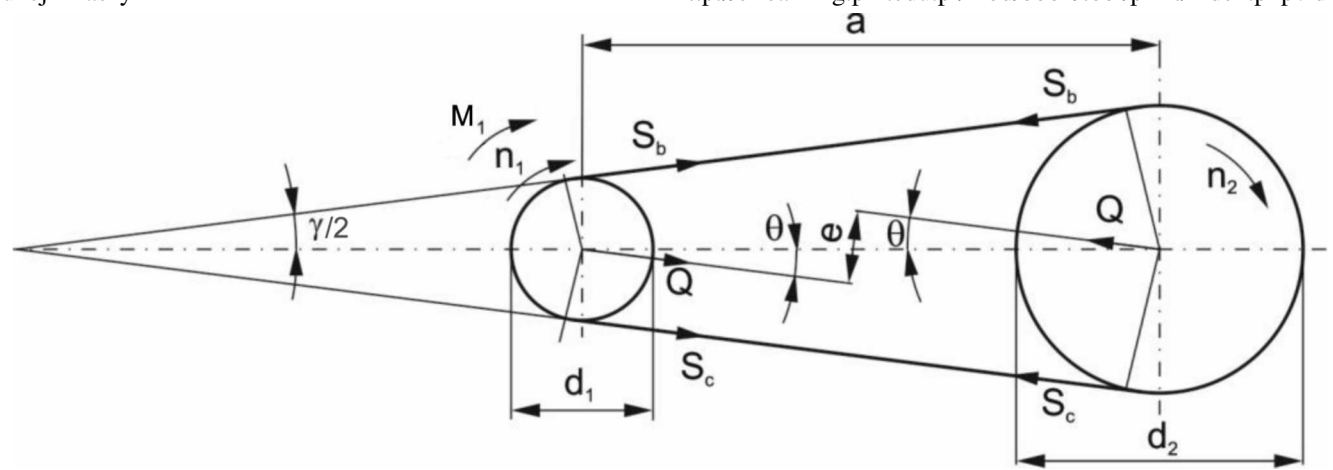
W tym przypadku za powiązanie pasa z kołem odpowiada współczynnik tarcia μ pomiędzy kołem a pasem. Z tego względu przekładnie z pasem płaskim w celu przenoszenia dużych momentów wymagają stosowania dużych sił napięcia. Innym rozwiązaniem częściej wykorzystywanych jest przekładnia z pasem klinowym (rysunek poniżej).



W tym przypadku za przenoszenie momentu odpowiada znany już z poprzednich wykładów pozorny współczynnik tarcia $\mu' = \mu / \cos(\alpha/2)$. Z tego względu jest to rozwiązanie bardziej korzystne od pasa płaskiego.

Napinanie pasów odbywa się najczęściej przez przesuw koła lub przez zastosowanie rolki napinającej.

Rozkład sił w przekładni pasowej z pasem o sprzężeniu ciernym przedstawiono poniżej.



Cięgno bierne (b) napinane jest z siłą S_b natomiast czynne (c) z siłą S_c . Zapisując sumy momentów można uzyskać równanie

$$S_c - S_b = \frac{2M_1}{d_1} = P$$

Zapisując natomiast sumę rzutów sił na osie można wyznaczyć wypadkową siłę obciążającą łożyska w postaci

$$Q = \sqrt{S_b^2 + S_c^2 + 2S_b S_c \cos \gamma}$$

Korzystając ze wzoru Eulera zależność pomiędzy napięciami cięgien wyraża się jako

$$S_c = S_b e^{\mu \alpha}$$

Przyjmując, że

$$m = e^{\mu \alpha}$$

uzyskuje się napięcia cięgien

$$S_c = P \frac{m}{m-1}$$

$$S_b = P \frac{1}{m-1}$$

Napięcie wstępne w pasie natomiast

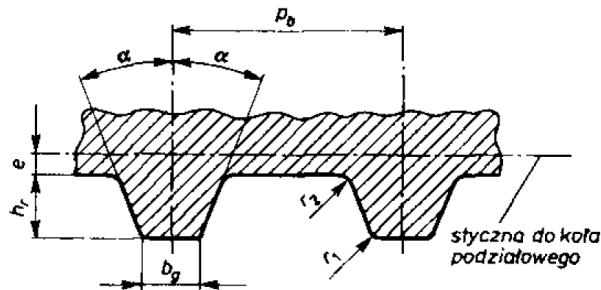
$$S_0 = \frac{S_c + S_b}{2} = P \frac{m+1}{m-1}$$

8.4. Przekładni z pasem zębatym

Wyróżnia się pasy zebate:

- calowe (np.: XL wg PN-84/M-85211),
- metryczne (np.: HTD nieznormalizowane).

Przykładowy calowy pas zębaty pokazano poniżej.



Stosowanie pasów zębatych nie wymaga dużego napięcia wstępnego.

Długość pasa zębatego oblicza się na podstawie jego podziałki i liczby zębów

$$L = p z_p$$

gdzie: p to podziałka, z_p to liczba zębów pasa. Średnice podziałowe kół pasowych zębatych dane są w postaci

$$d_1 = \frac{p z_1}{\pi}$$

$$d_2 = \frac{p z_2}{\pi}$$

Przełożenie przekładni oblicza się jako stosunek liczb zębów kół pasowych

$$i = \frac{z_2}{z_1}$$

Przekształcając zależność (2) i wprowadzając dane dla przekładni z pasem zębatym uzyskuje się (3)

$$i \sin \frac{\alpha}{2} = \pi \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \quad (3)$$

Z zależności (3) oblicza się kąt opasania α . Wówczas na podstawie zależności (1) można obliczyć odległość osi jako (4)

$$A = \frac{p(z_2 - z_1)}{2\pi \cos \frac{\alpha}{2}}$$

Koła pasowe wykonywane są wg wariantu z obrzeżami (rys. a) lub bez (rys. b).

